２章　開水路における急変流　　不等流(1)

２－１急変流とは

① 断面形状や底面形状が急激に変わる流れ

② 急変部は一般に短いので摩擦を無視できる

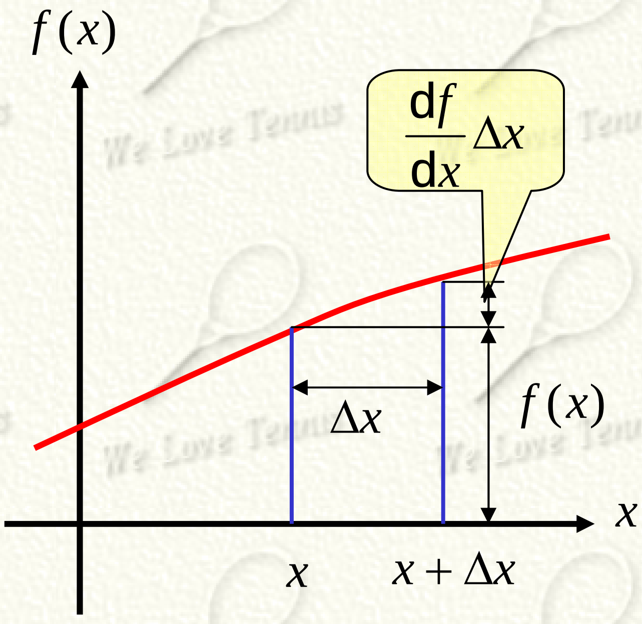
③ 流れが連続的に変化する場合はベルヌイの式、不連続部を伴って変化する場合は運動量の式を用いる

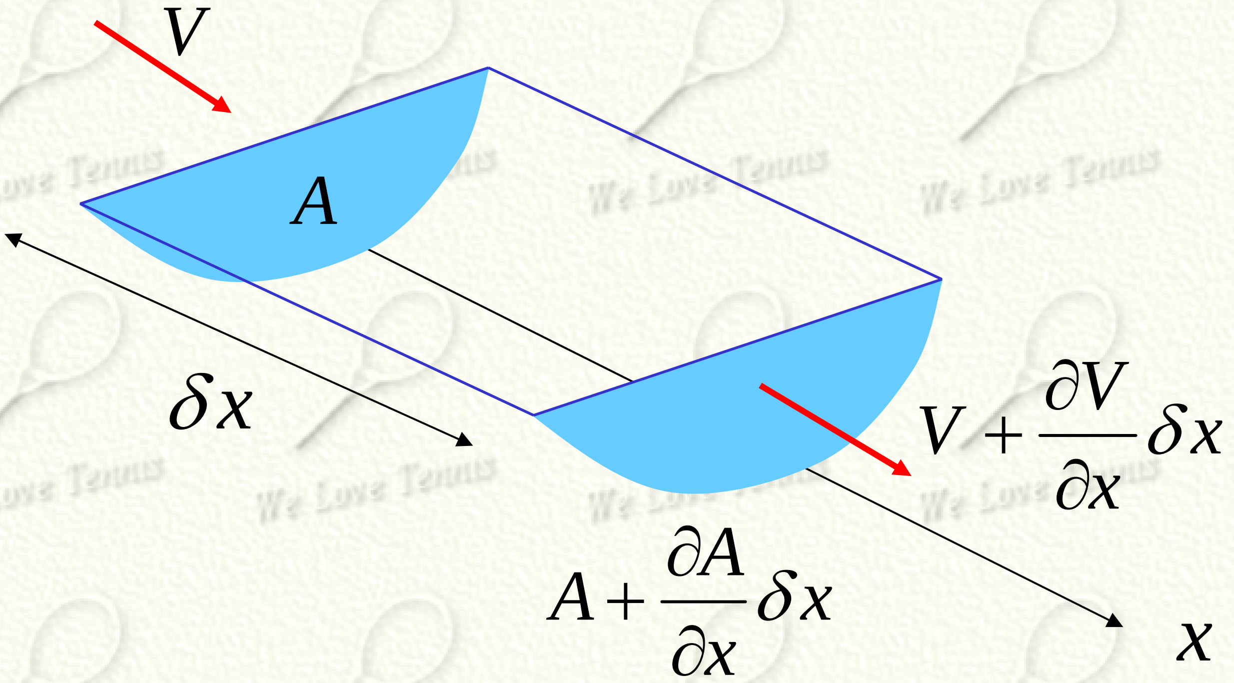
２－２ 不等流における連続式

予備知識　Taylor展開

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!} f''(x)\Delta x^2 + \cdots$$

$$\approx f(x) + f'(x)\Delta x$$





$$Q = AV = \left(A + \frac{\partial A}{\partial x}\delta x\right)\left(V + \frac{\partial V}{\partial x}\delta x\right)$$

$$= AV + A\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + V\frac{\partial A}{\partial x}\delta x + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}$$

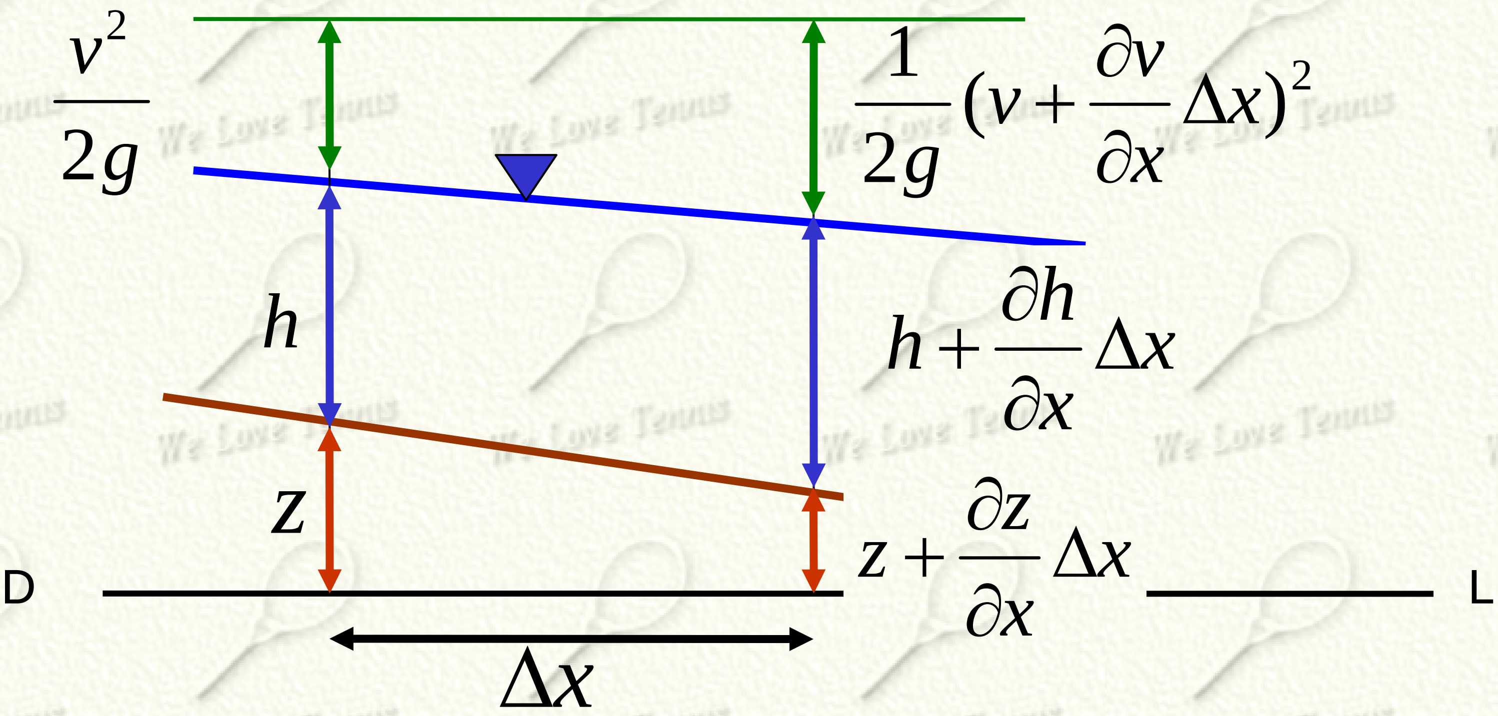
$$\therefore A\frac{\partial V}{\partial x}\cancel{\delta x} + V\frac{\partial A}{\partial x}\cancel{\delta x} = 0$$

$$\therefore A\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \therefore \dfrac{\partial}{\partial x}\left(AV\right) = 0 \\ AV = \text{Constant} = Q \end{array}}$$

2－3 不等流対するベルヌイ式の適用と比エネルギー

Text 3.5 (上) P83-91



2断面間にベルヌイ式を立てる

$$\cancel{z}+\cancel{h}+\frac{\cancel{v^2}}{2g}=\cancel{z}+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\cancel{h}+\frac{\partial h}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{\cancel{2}g}\left(v+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)^2$$

高次微小項

$$v^2+2v\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\cancel{\Delta x^2}\approx \cancel{v^2}+\cancel{2}v\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cancel{\Delta x}+\frac{\partial h}{\partial x}\cancel{\Delta x}+\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x}\cancel{\Delta x}=0$$

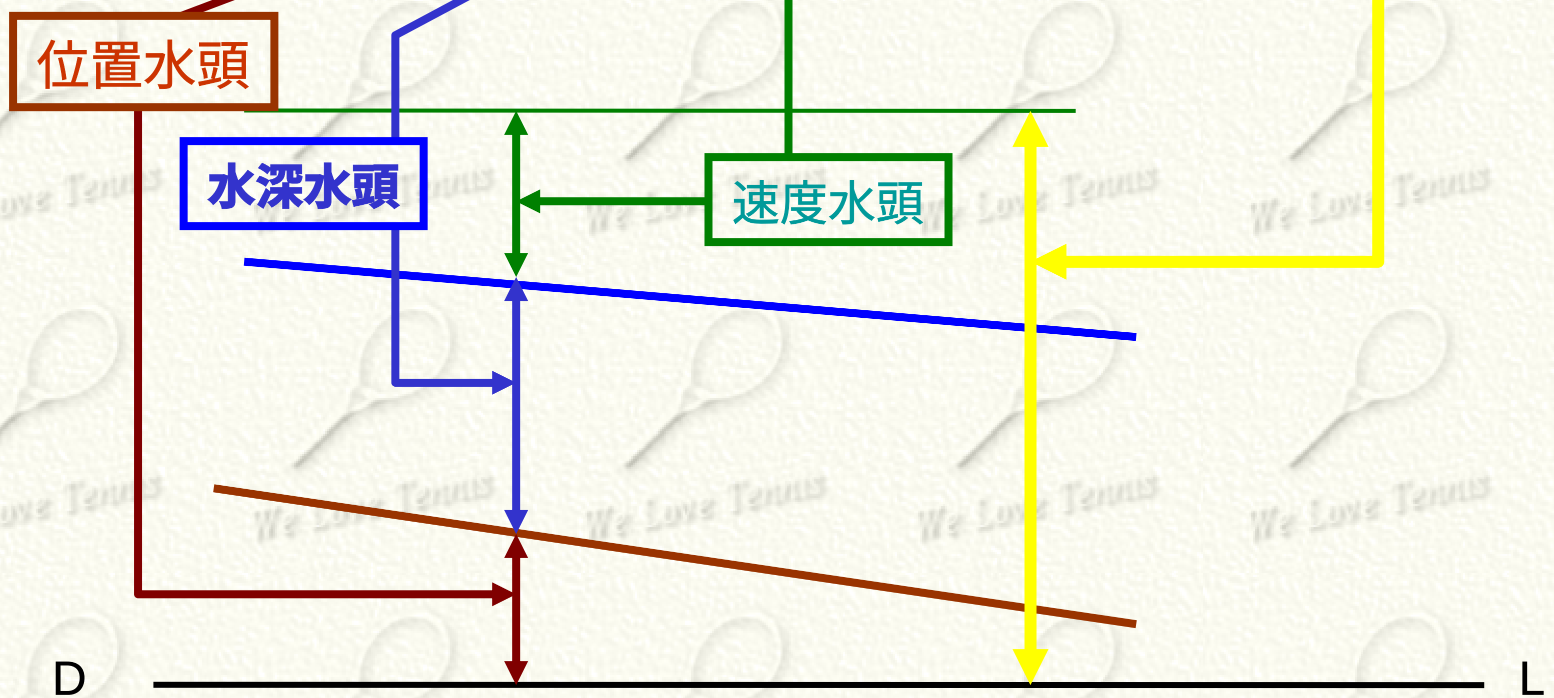
$$\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2g}\frac{\partial v^2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z+h+\frac{v^2}{2g}\right)=0$$

$$\boxed{z+h+\frac{v^2}{2g}=\text{Constant}}$$

開水路の不等流を解くための基礎式の１つ

$$\boxed{z}+\boxed{h}+\boxed{\frac{v^2}{2g}}=\text{Constant}$$ **=総水頭**



$$z + h + \frac{v^2}{2g} = \text{Constant}$$

開水路のベルヌイの式を直接扱う前に、水深と速度水頭の持つ性質について詳しく調べる。このため水路底面を基準にとったより簡単な式を考える。

$$E = h + \frac{v^2}{2g}$$

- これを比エネルギー(Specific Energy)と呼ぶ。
- これは、水深（圧力）水頭と速度水頭の和であり、相互の依存関係を表す。E が一定ならば h が増えれば v が減る。逆も言える。
- 一方、$E = H - z$ なので河床が上がると比エネルギーは減少する。

２－５ 比エネルギーと水深

広長方形断面水路を考える

$E = h + \dfrac{v^2}{2g}$ に $v = \dfrac{Q}{Bh} = \dfrac{q}{h}$ （q：単位幅流量）を代入する。

$$E = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{1}{2g}\frac{q^2}{h^2} = h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

• q が一定のもとで h による E の変化、E による h の変化を調べる。
•極値を調べる。

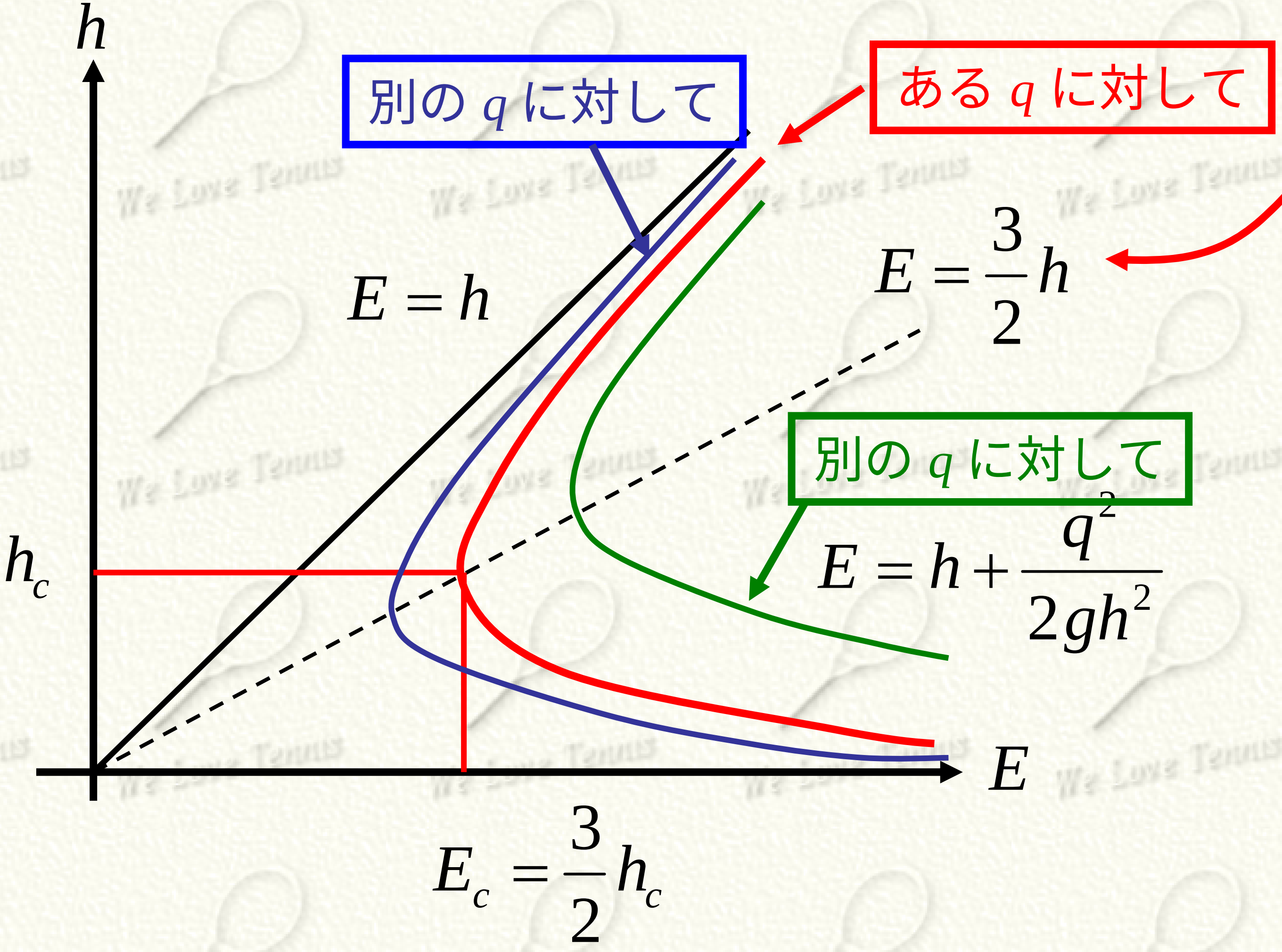
$$\frac{\partial E}{\partial h} = 1 - \frac{q^2}{gh^3} = 0 \quad \rightarrow \boxed{h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}}$$

限界水深

において極値を持つ。このときの E は、

$$E_c = h_c + \frac{q^2}{2g}\frac{1}{h_c^2} = h_c + \frac{1}{2}h_c^3\frac{1}{h_c^2} = \frac{3}{2}h_c$$

$$\boxed{\therefore E_c = \frac{3}{2}h_c}$$



$$\frac{\partial E}{\partial h} = 1 - \frac{q^2}{gh^3} = 0$$ において　　$q = hv$を代入すると、

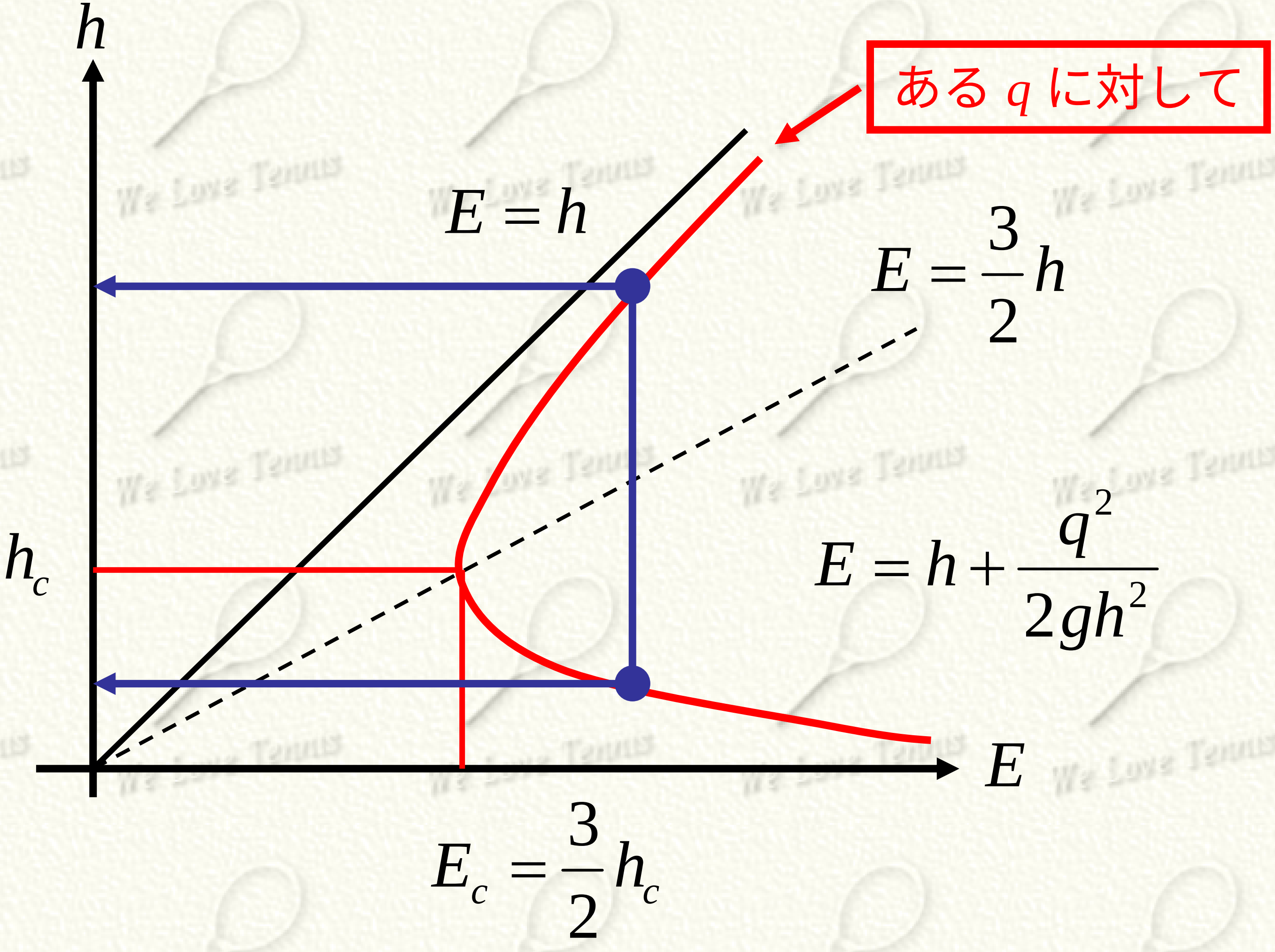
$$1 - \frac{q^2}{gh^3} = 1 - \frac{h^2 v^2}{gh^3} = 1 - \frac{v^2}{gh} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{v}{\sqrt{gh}} \right)^2 = 1$$

$v = \sqrt{gh}$ 　は長波の伝播速度である。

$Fr = \dfrac{v}{\sqrt{gh}}$ 　とおいて、これを フルード数(Froude Number)と呼ぶ。

Fr は　E の最小値が　$Fr = 1$、すなわち　$v_c = \sqrt{gh}$において現れることを示す。

qが一定で、Eが同じでも2つの水深が生じ得る。



① $h > h_c$ について見ると、この状態の流速は

$$v = \frac{q}{h} < \frac{q}{h_c} = \frac{h_c v_c}{h_c} = v_c = \sqrt{gh_c} < \sqrt{gh}$$

$$\therefore Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}} < 1$$

この状態の流れを常流(Sub Critical Flow)
と言い、この時の水深を常流水深という。

②次に $h < h_c$ について見ると、この状態の流速は

$$v = \frac{q}{h} > \frac{q}{h_c} = \frac{h_c v_c}{h_c} = v_c = \sqrt{gh_c} > \sqrt{gh}$$

$$\therefore Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}} > 1$$

この状態の流れを射流(Super Critical Flow)
と言い、この時の水深を射流水深という。

まとめ

限界水深 h_c は流量 q が一定のとき比エネルギー E を最小にする水深である。

$h_c = \sqrt[3]{\dfrac{q^2}{g}}$ において最小値 $E_c = \dfrac{3}{2} h_c$ となる。

同一の流量 q のもとで、同一の比エネルギーを与える水深が２つ存在する。

$h > h_c$ なる水深hを常流水深、このとき$Fr < 1$となる。

$h < h_c$ なる水深hを射流水深、このとき$Fr > 1$となる。

両者を対応水深（交代水深）という。

問題

幅10mの長方形断面水路にQ=18m^3/sの水が流れている。水深が1.2mのとき、

(1) 比エネルギーを求めよ。

$$v=\frac{Q}{bh}=\frac{18}{10\times1.2}=1.5\ (\mathrm{m/s})\quad E=h+\frac{v^2}{2g}=1.2+\frac{1.5^2}{2\times9.8}=1.315(\mathrm{m})$$

(2)限界水深を求めよ。

$$h_c=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1.8^2}{9.8}}=0.69\ (\mathrm{m})$$

(3)限界水深の時の比エネルギーを求めよ。

$$E_c=\frac{3}{2}h_c=1.037\ (\mathrm{m})$$

(4)この流れは常流か射流か。

$h>h_c$よって常流

２－６　比エネルギーと流量

比エネルギーEが一定のときのqとhの関係を調べる。

$$E = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{q^2}{2gh^2}$$ を変形して、 $$\boxed{q^2 = 2g(E-h)h^2}$$

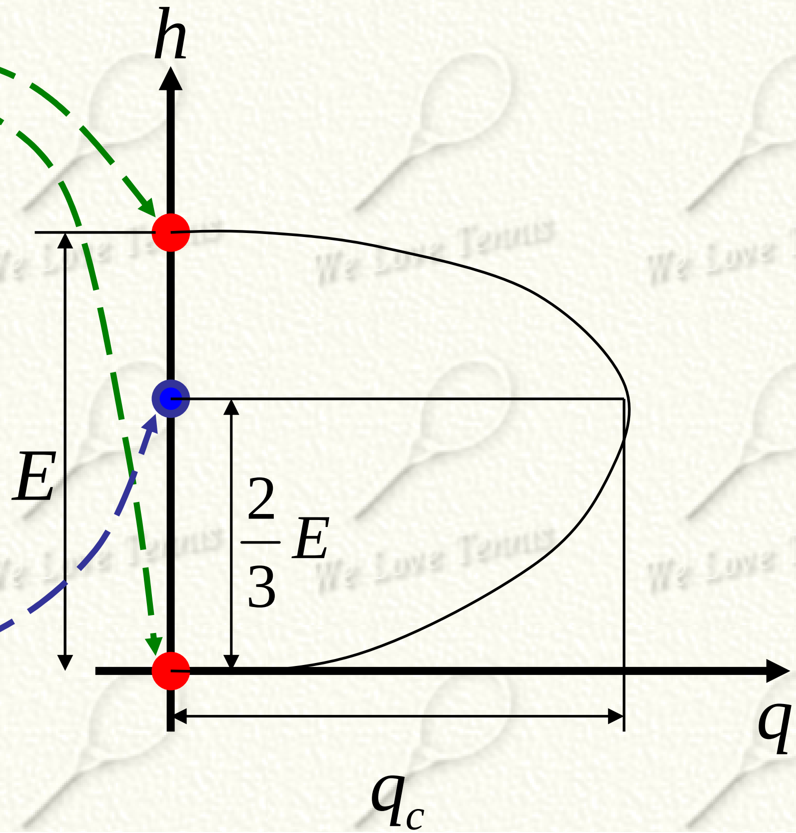
$$\boxed{h = E,\quad h = 0 \text{ で } q = 0}$$

●極値は、

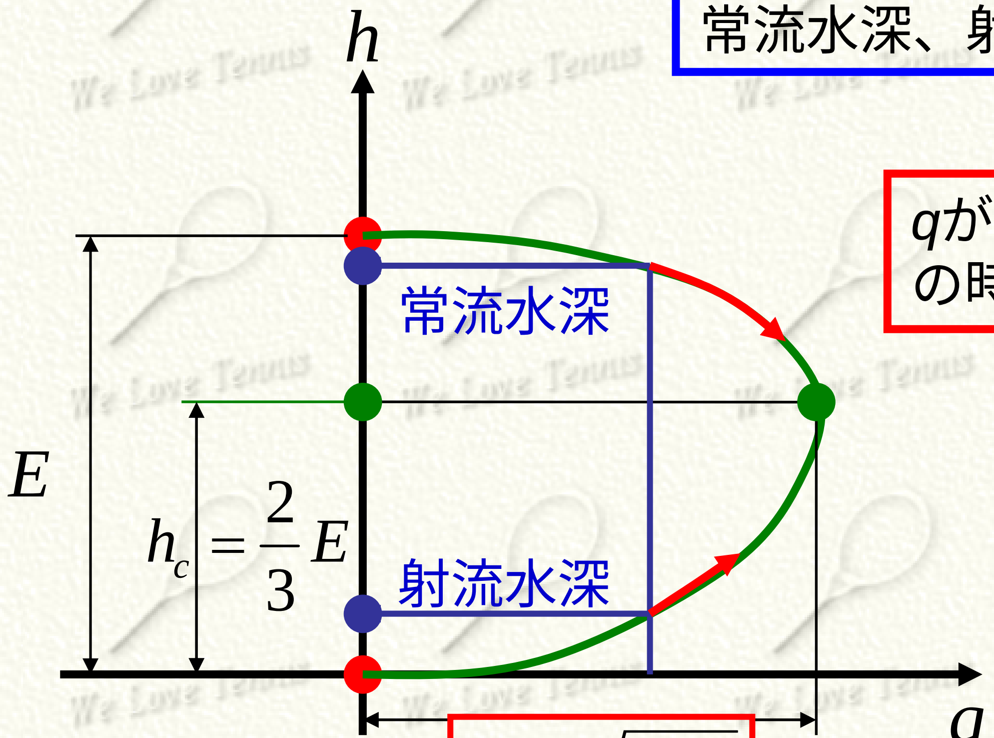
$$\frac{\partial q^2}{\partial h} = 2g(-1)h^2 + 2g(E-h)2h$$

$$= 2g(2E-3h)h = 0$$

すなわち、 $$\boxed{h_c = \frac{2}{3}E}$$



あるqについて２つの水深が生じ、常流水深、射流水深が発生し得る。



$q_c = \sqrt{g h_c^{3}}$

qが最大となるのは$h = h_c$の時で、この時のqは

$$q^2 = 2g(E-h)h^2$$

より

$$q_c^{\,2} = 2g\left(E - \frac{2}{3}E\right)\left(\frac{2}{3}E\right)^2 = g \cdot \frac{2}{3}E\left(\frac{2}{3}E\right)^2 = g h_c^{\,3}$$

$$\therefore q_c = \sqrt{g h_c^{\,3}}$$

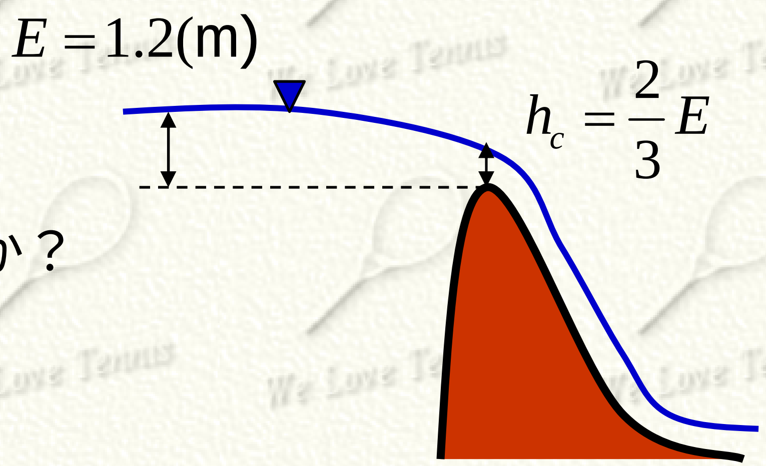
まとめ

限界水深 h_c は、比エネルギー E が一定のとき、流量 q を最大にする水深である。

$h_c = \dfrac{2}{3}E$ において流量の最大値 $q_c = \sqrt{g\left(\dfrac{2}{3}E\right)^2}$

問題

ダムの越流部から測って E=1.2mの水位を保つ貯水池がある。



①越流する流量は単位幅あたりいくらか？

越流部において限界水深が現れ、

$$h_c = \frac{2}{3}E = \frac{2}{3} \times 1.2 = 0.8(\mathrm{m})$$

よって、 $q = \sqrt{gh_c^{\ 3}} = \sqrt{9.8 \times 0.8^3} = 2.24(\mathrm{m}^2 / \mathrm{s})$

②このとき、頂部で Fr =1 となることを確かめよ。

$$Fr = \frac{v_c}{\sqrt{gh_c}} = \frac{q}{h_c\sqrt{gh_c}} = \frac{\sqrt{gh_c^{\ 3}}}{\sqrt{gh_c^{\ 3}}} = 1$$

２－７　急変流の水面形方程式

Text 3.5 (上) p83-91
7.1 (下) p1-7

ベルヌイの式に戻って

$$\frac{d}{dx}\left(z+\boxed{h+\frac{V^2}{2g}}\right)=0 \longrightarrow \frac{d}{dx}(z+E)=0$$

$$\frac{dE}{dx}=-\frac{dz}{dx}$$

ここで、$\frac{dE}{dx}=\frac{d}{dx}\left(h+\frac{V^2}{2g}\right)$

長方形断面を考え $q=\frac{Q}{B}=\frac{AV}{B}=\frac{BhV}{B}=hV$ より $\boxed{V=\frac{q}{h}}$

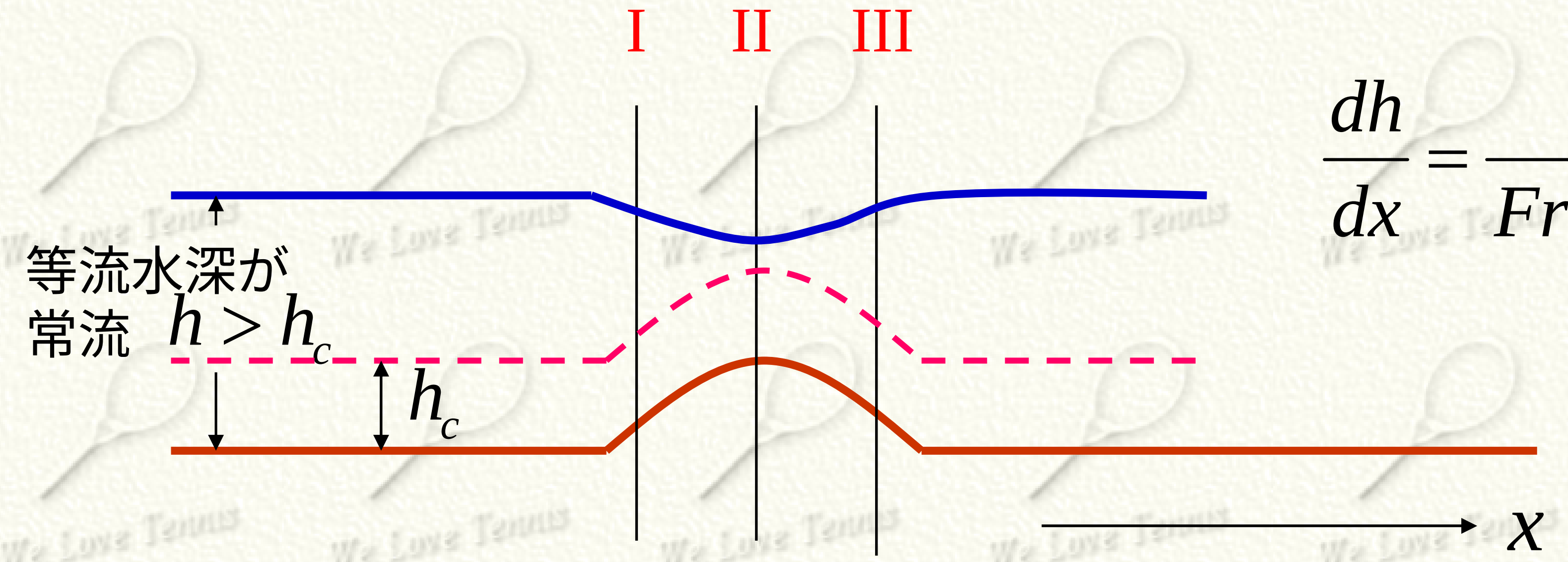
$$\frac{dE}{dx}=\frac{d}{dx}\left(h+\frac{q^2}{2gh^2}\right)=\frac{dh}{dx}+\frac{d}{dh}\left(\frac{q^2}{2gh^2}\right)\frac{dh}{dx}=\left(1-\frac{q^2}{gh^3}\right)\frac{dh}{dx}$$

$$\frac{dE}{dx}=\left(1-\frac{q^2}{gh^3}\right)\frac{dh}{dx}=\left(1-\frac{V^2}{gh}\right)\frac{dh}{dx}=\left(1-Fr^2\right)\frac{dh}{dx}=-\frac{dz}{dx}$$

したがって、 $$\boxed{\frac{dh}{dx}=\frac{1}{Fr^2-1}\frac{dz}{dx}}$$

急変流の水面形方程式

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{Fr^2 - 1}\frac{dz}{dx}$$

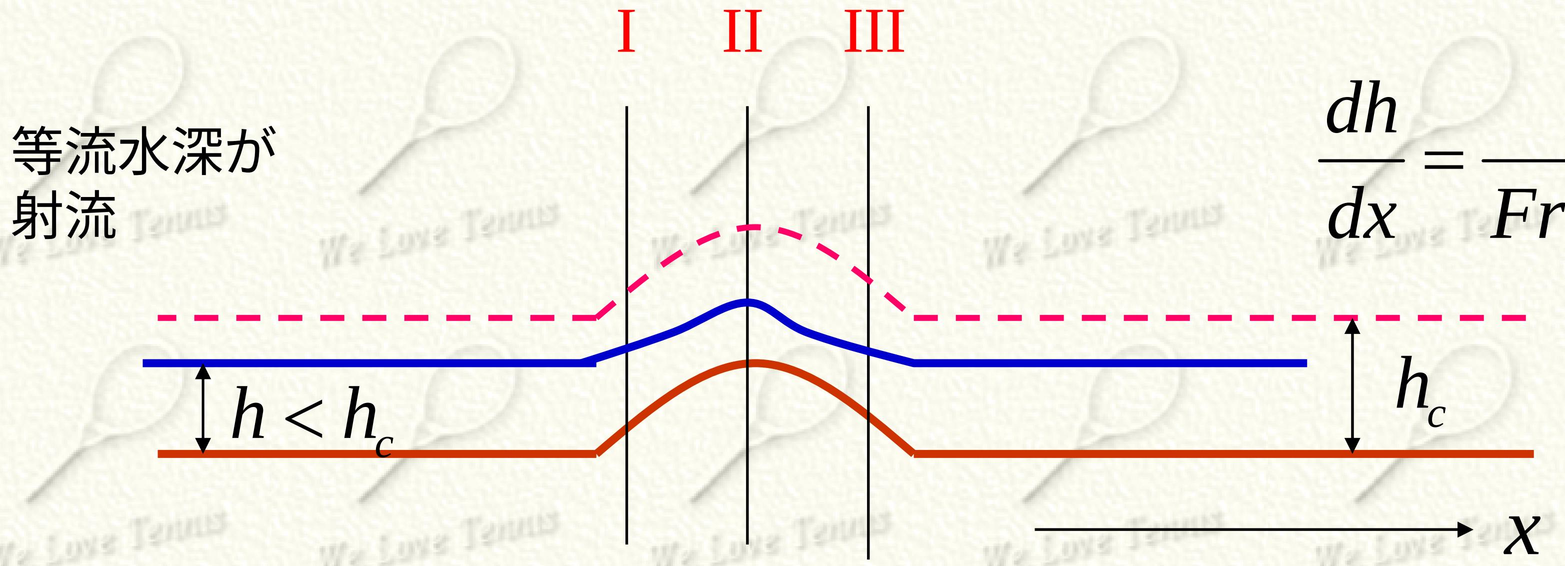


(1) 常流の場合 ($Fr < 1$)

断面 I において $\dfrac{dz}{dx} > 0$ → $\dfrac{dh}{dx} < 0$

断面 II において $\dfrac{dz}{dx} = 0$ → $\dfrac{dh}{dx} = 0$

断面 III において $\dfrac{dz}{dx} < 0$ → $\dfrac{dh}{dx} > 0$



$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{Fr^2 - 1}\frac{dz}{dx}$$

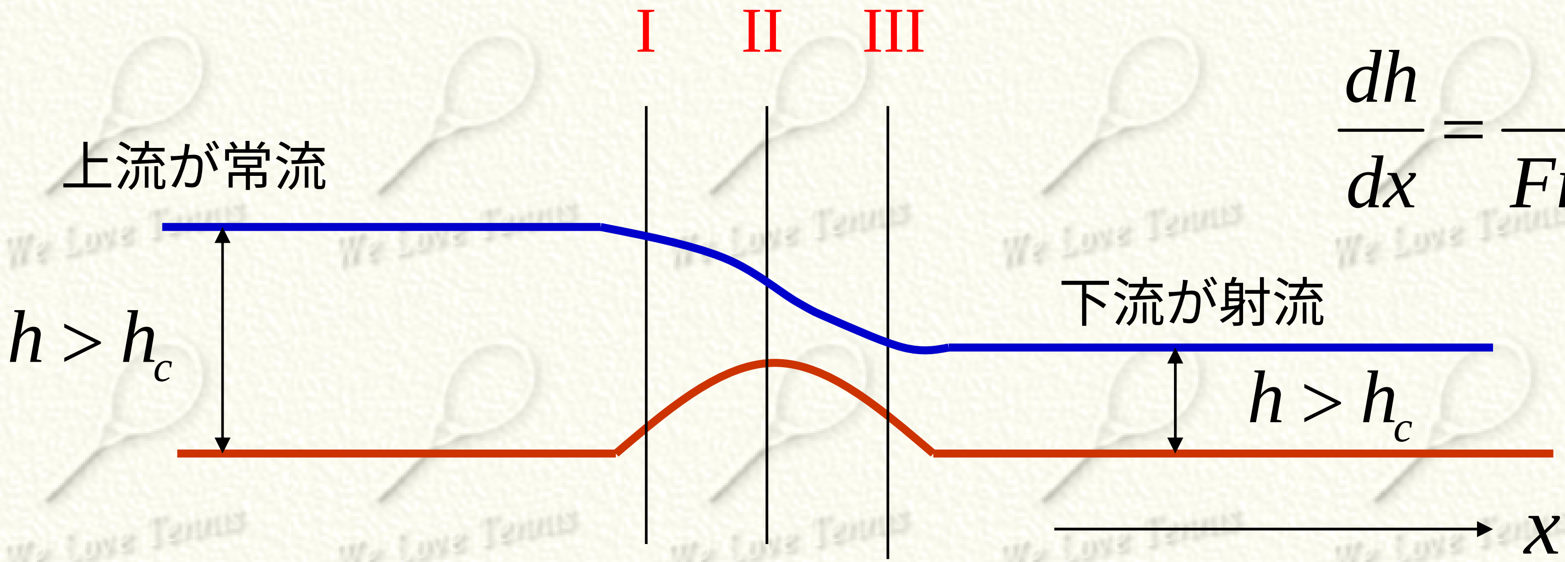
(2) 上流も下流も射流の場合 ($Fr > 1$)

断面 I において $\dfrac{dz}{dx} > 0$ → $\dfrac{dh}{dx} > 0$

断面 II において $\dfrac{dz}{dx} = 0$ → $\dfrac{dh}{dx} = 0$

断面 III において $\dfrac{dz}{dx} < 0$ → $\dfrac{dh}{dx} < 0$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{Fr^2 - 1}\frac{dz}{dx}$$



(1) 上流が常流($Fr < 1$)、下流が射流の ($Fr > 1$)の場合

断面 I において $\frac{dz}{dx} > 0$ → $\frac{dh}{dx} < 0$

断面 III において $\frac{dz}{dx} < 0$ → $\frac{dh}{dx} < 0$

→ IIにおいても $\frac{dh}{dx} < 0$ が起きる。

しかし、ここでは $\frac{dz}{dx} = 0$ なので矛盾する。$\frac{dz}{dx} = 0$ で $\frac{dh}{dx} < 0$ になり得るのは分母 = 0 の場合のみ。すなわちIIにおいては $h = h_c$

即ち、限界水深となることが必然化される。

一様勾配（水平）で幅が変化する長方形断面水路の水面形

$$\frac{dE}{dx}=\frac{d}{dx}\left(h+\frac{V^2}{2g}\right)=\frac{d}{dx}\left(h+\frac{1}{2g}\frac{Q^2}{B^2h^2}\right)$$

$$=\frac{dh}{dx}+\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{h^2}\frac{dB^{-2}}{dx}+\frac{1}{B^2}\frac{dh^{-2}}{dx}\right)$$

$$=\frac{dh}{dx}-\frac{Q^2}{g}\left(\frac{1}{h^2B^3}\frac{dB}{dx}+\frac{1}{B^2h^3}\frac{dh}{dx}\right)=\frac{dh}{dx}\left(1-\frac{Q^2}{gh^3B^2}\right)-\frac{Q^2}{gh^2B^3}\frac{dB}{dx}$$

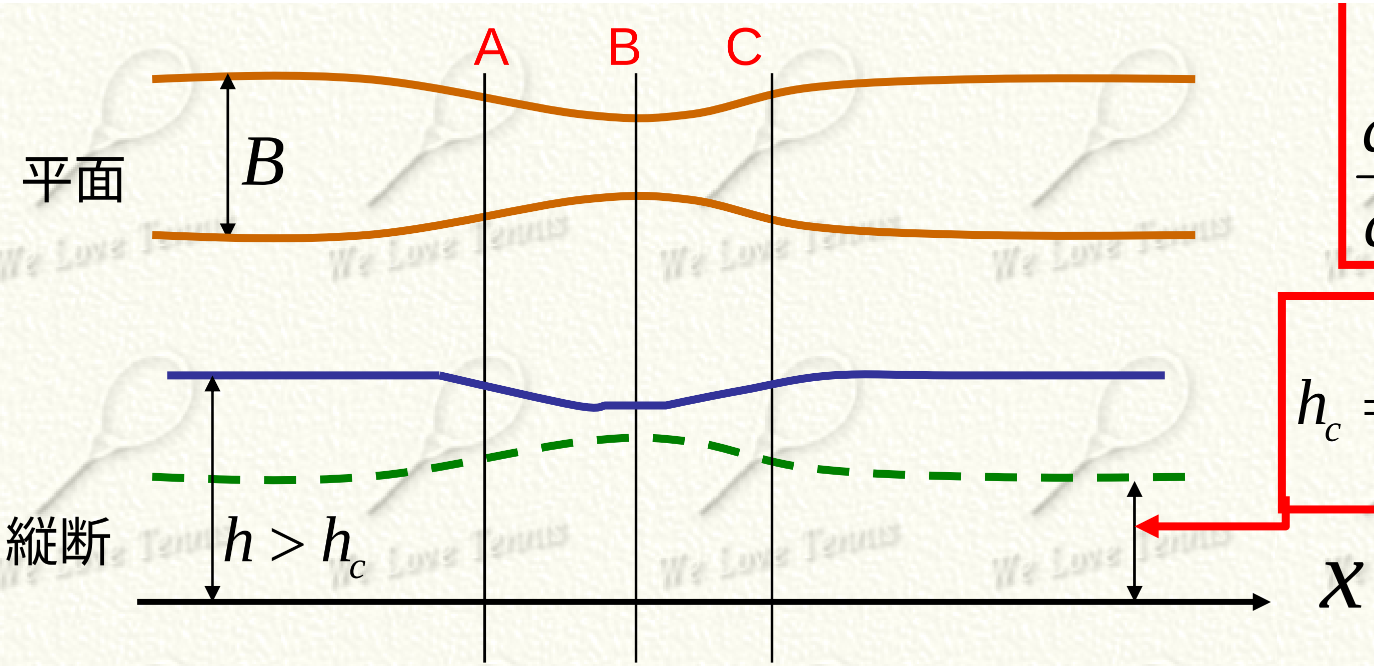
$$=\frac{dh}{dx}\left(1-\frac{q^2}{gh^3}\right)-\frac{q^2}{gh^2B}\frac{dB}{dx}=\frac{dh}{dx}\left(1-Fr^2\right)-\frac{q^2h}{gh^3B}\frac{dB}{dx}$$

$h_c{}^3=\dfrac{q^2}{g}$ なので

$$=\frac{dh}{dx}\left(1-Fr^2\right)-\frac{h_c{}^3}{h^3}\frac{h}{B}\frac{dB}{dx}=-\frac{dz}{dx}=0$$

ゆえに、

$$\boxed{\frac{dh}{dx}=\frac{\dfrac{h_c{}^3}{h^2}\dfrac{1}{B}}{1-Fr^2}\frac{dB}{dx}}$$



$$\frac{dh}{dx} = \frac{\dfrac{h_c^{\ 3}}{h^2 B}}{1 - Fr^2}\frac{dB}{dx}$$

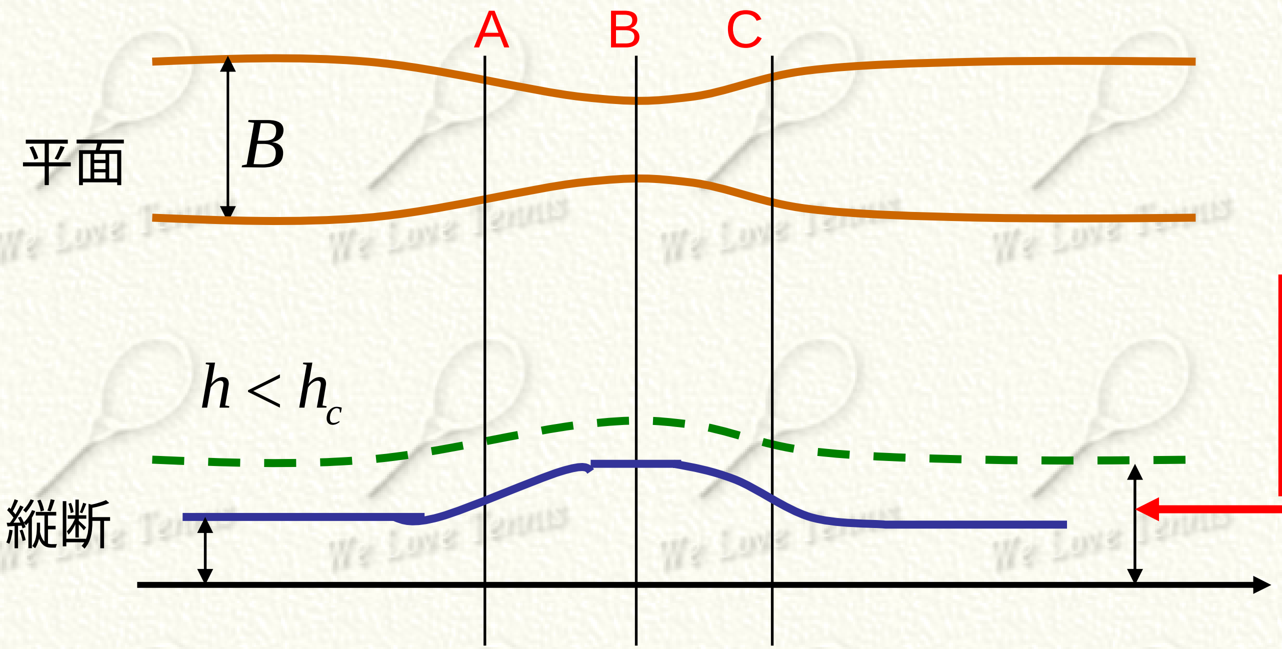
$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 g}}$$

常流($Fr < 1$)の場合　　分母 > 0

Aで　$\dfrac{dB}{dx} < 0 \rightarrow \dfrac{dh}{dx} < 0$

Bで　$\dfrac{dB}{dx} = 0 \rightarrow \dfrac{dh}{dx} = 0$

Cで　$\dfrac{dB}{dx} > 0 \rightarrow \dfrac{dh}{dx} > 0$



$$\frac{dh}{dx} = \frac{\dfrac{h_c^{\,3}}{h^2 B}}{1 - Fr^2}\frac{dB}{dx}$$

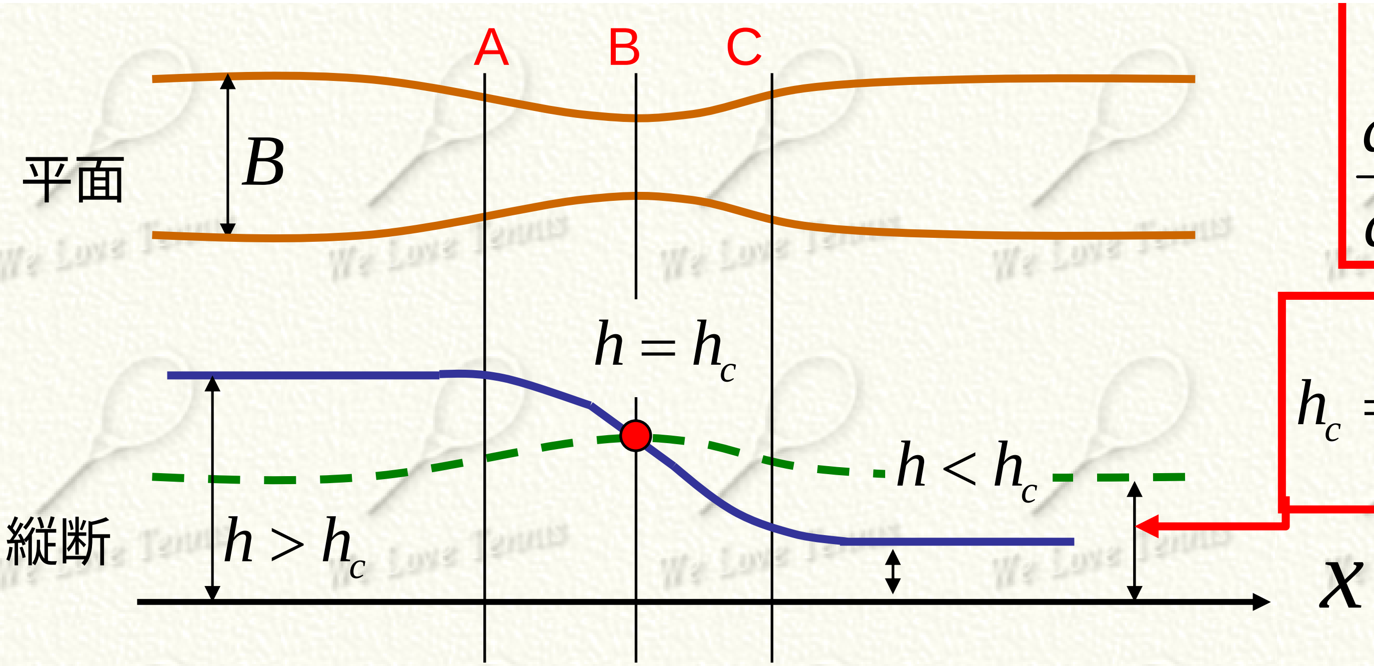
$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 g}}$$

射流($Fr > 1$)の場合　　分母 < 0

Aで　$\dfrac{dB}{dx} < 0 \rightarrow \dfrac{dh}{dx} > 0$

Bで　$\dfrac{dB}{dx} = 0 \rightarrow \dfrac{dh}{dx} = 0$

Cで　$\dfrac{dB}{dx} > 0 \rightarrow \dfrac{dh}{dx} < 0$



$$\frac{dh}{dx} = \frac{\dfrac{h_c^3}{h^2 B}}{1 - Fr^2} \frac{dB}{dx}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 g}}$$

上流側で常流($Fr < 1$)

下流側で射流($Fr > 1$)

Aで $\frac{dB}{dx} < 0 \rightarrow \frac{dh}{dx} < 0$

Cで $\frac{dB}{dx} > 0 \rightarrow \frac{dh}{dx} < 0$

Bでは $\frac{dB}{dx} = 0$ なので、有限値 $\frac{dh}{dx} < 0$ が生ずるためには、

分母 $= 0$ すなわち $Fr = 1,\quad h = h_c$ となることを要す。