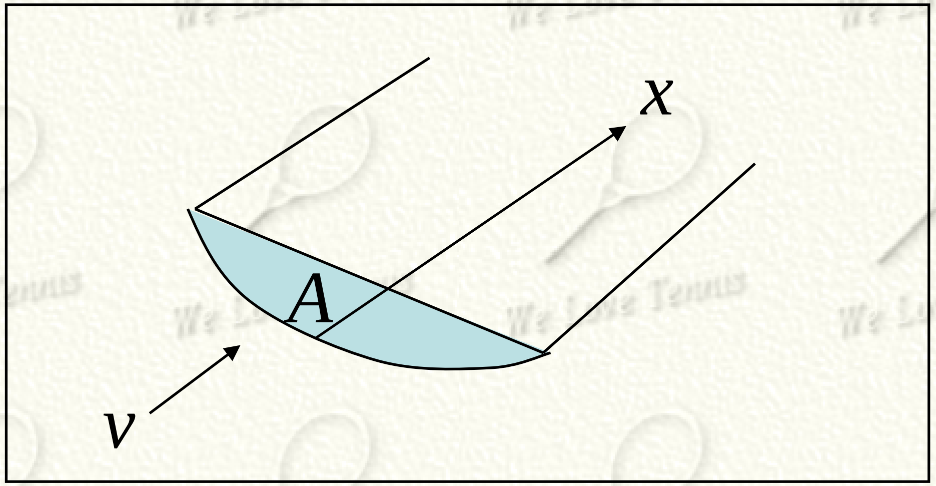
３章　開水路における急変流　不等流(２)

３－１開水路流れに対する運動量の適用と比力

【１】流れにおける運動量

•運動量(Momentum) = 質量×速度（ベクトル）
•流速 v を持つ流体が、断面積 A を δt 時間通過するときの質量は、

$$= \rho A v \delta t$$



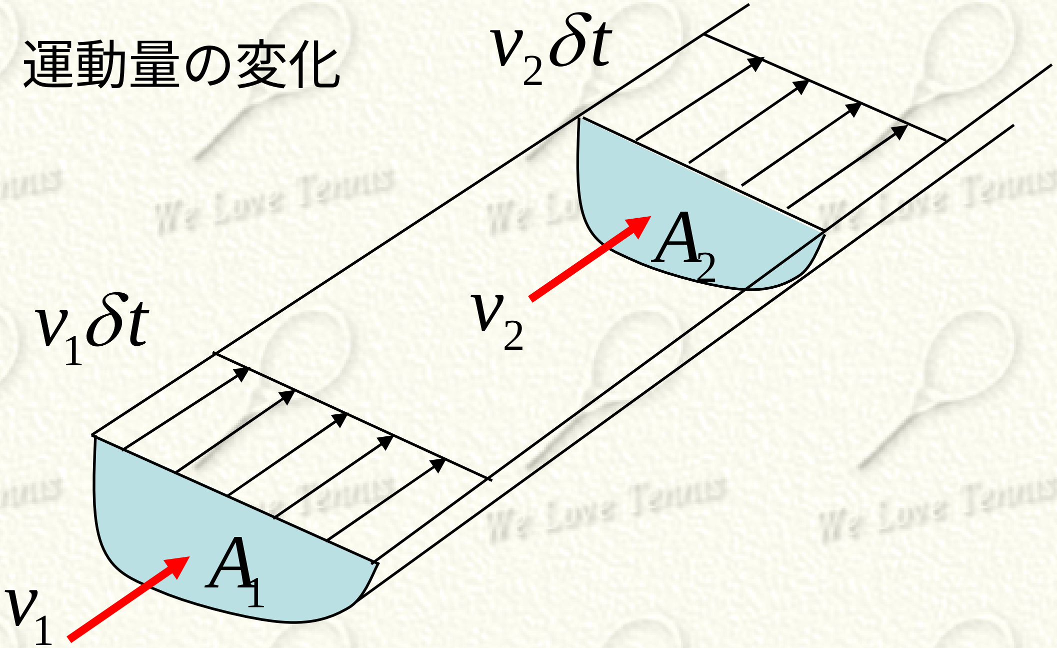
•この流体のもつ
•運動量は、

$$= \rho A v \delta t \cdot \vec{v}$$ （ベクトル）

$$= \rho A v^2 \delta t$$ （同一の向きについて考えれば

スカラー的に扱ってもよい）

【2】運動量の変化



$$\text{運動量変化} = \rho A_2 v_2{}^2 \delta t - \rho A_1 v_1{}^2 \delta t$$

$$= \rho (A_2 v_2{}^2 - A_1 v_1{}^2) \delta t$$

$$= \rho Q (v_2 - v_1) \delta t$$

ところで、Newtonの第２法則

$$m\frac{dV}{dt}=F \qquad m: \text{質量} \qquad F: \text{外力}$$

について、両辺を $(t, t+\delta t)$ の間で積分すると、

$$\int_t^{t+\delta t} m\frac{dV}{dt}dt=\int_t^{t+\delta t} Fdt \quad \rightarrow \quad m\left[V\right]_t^{t+\delta t}=\left[F\bullet t\right]_t^{t+\delta t}$$

$$m\{V(t+\delta t)-V(t)\}=F\bullet(\cancel{t}+\delta t-\cancel{t})$$

$$\boxed{mV(t+\delta t)-mV(t)}=\boxed{F\bullet\delta t}$$

運動量の差　　力積

流体では

運動量の差 $= \rho(A_2 v_2{}^2 - A_1 v_1{}^2)\cancel{\delta} t = F\cancel{\delta} t =$ 力積

または、

$$\boxed{\rho Q(v_2 - v_1) = F}$$

外力 F がゼロであれば $\rho Q v_2 = \rho Q v_1$ となり運動量は保存される。

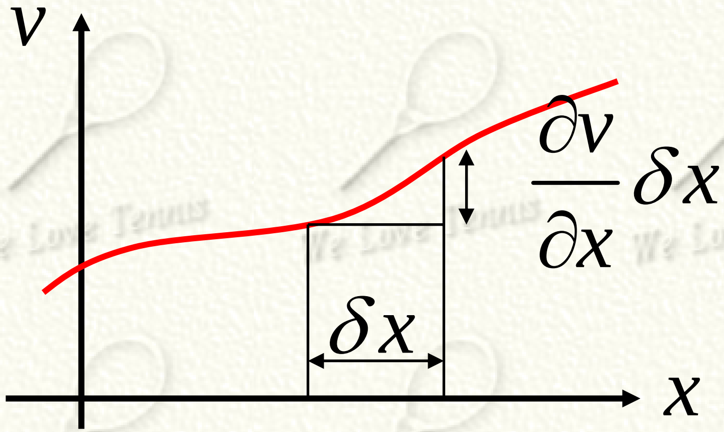
外力 F を受けると運動量はその分だけ変化する。

【３】開水路への適用

①運動量の差（変化量）$= \rho(A_2 {v_2}^2 - A_1 {v_1}^2)\delta t$

ここで、

$$\begin{cases} v_1 = v, \\ v_2 = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}\delta x, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = A \\ A_2 = A + \dfrac{\partial A}{\partial x}\delta x \end{cases}$$



とおくと、

$$運動量の変化 = \rho\left\{\left(A + \frac{\partial A}{\partial x}\delta x\right)\underline{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\right)^2} - Av^2\right\}\delta t$$

$$\rightarrow v^2 + 2v\frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \cancel{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\right)^2} = v^2 + \frac{\partial v^2}{\partial x}\delta x$$

$$= \rho\left\{\cancel{Av^2} + A\frac{\partial v^2}{\partial x}\delta x + v^2\frac{\partial A}{\partial x}\delta x + \cancel{\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial v^2}{\partial x}(\delta x)^2} - \cancel{Av^2}\right\}\delta t$$

$$= \rho\left\{A\frac{\partial v^2}{\partial x} + v^2\frac{\partial A}{\partial x}\right\}\delta x \bullet \delta t = \boxed{\rho\frac{\partial (Av^2)}{\partial x}\delta x \bullet \delta t}$$

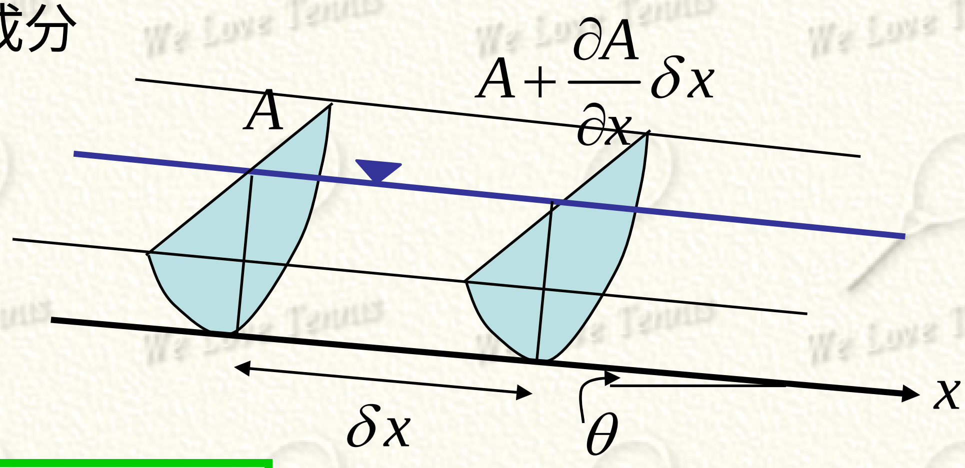
開水路の運動量変化量

(1)

•次に外力による力積を考える

外力＝重力＋圧力

①重力の流下方向成分による力積



$$\rho g \overset{\text{体積}}{\boxed{\frac{1}{2}\left\{A + \left(A + \frac{\partial A}{\partial x}\delta x\right)\right\}\delta x}} \sin\theta\cdot\delta t$$

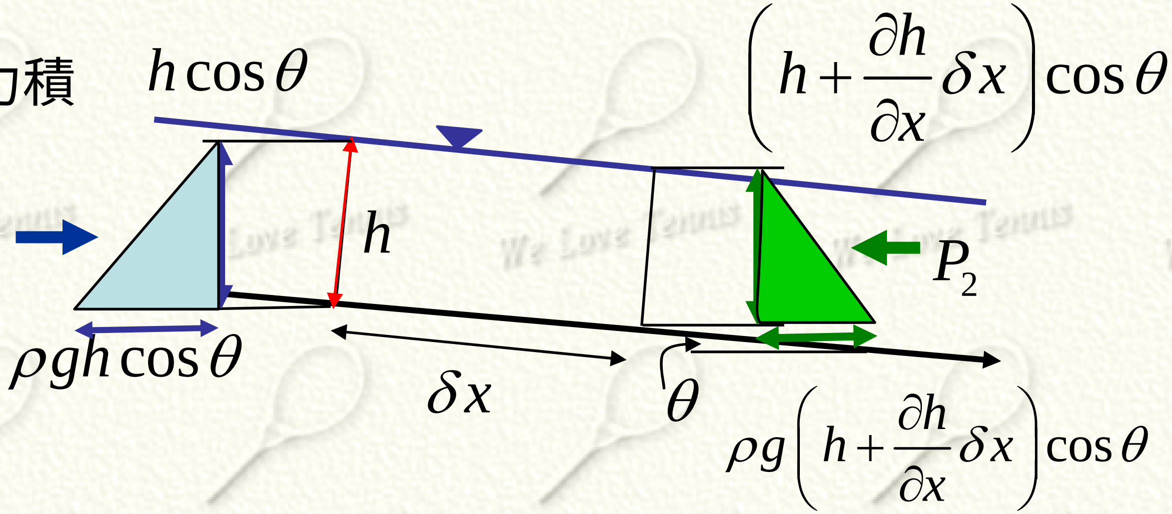
$$= \rho g\left\{A\delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x}\cancel{\delta x^2}\right\}\cdot\sin\theta\cdot\delta t$$

$$= \rho g A\cdot\sin\theta\cdot\delta t\cdot\delta x$$

$$= \boxed{-\rho g A\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\delta t\cdot\delta x}$$

(2)

②圧力の差による力積

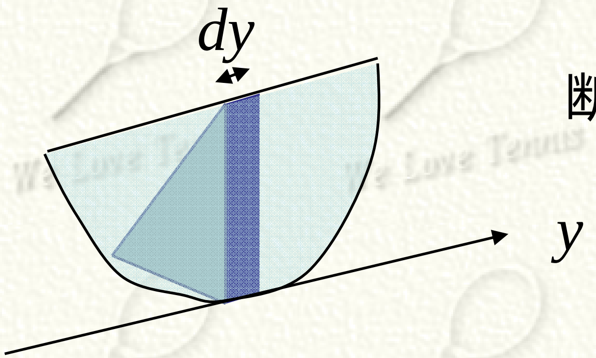


$$P_1=\frac{1}{2}\rho gh\cos\theta\cdot h$$

$$P_2=\frac{1}{2}\rho g\left(h+\frac{\partial h}{\partial x}\delta x\right)\cos\theta\cdot\left(h+\frac{\partial h}{\partial x}\delta x\right)=\frac{1}{2}\rho g\left\{h^2+2h\frac{\partial h}{\partial x}\delta x+\cancel{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\delta x\right)^2}\right\}\cos\theta$$

$$P_1-P_2=\left(\cancel{\frac{1}{2}\rho gh^2}\cos\theta-\cancel{\frac{1}{2}\rho gh^2}\cos\theta-\rho gh\frac{\partial h}{\partial x}\delta x\cos\theta\right)$$

断面全体の圧力差 $=-\rho g\underbrace{\int h\frac{\partial h}{\partial x}dy}_{=A}\cdot\cos\theta\cdot\delta x$



断面全体の圧力による力積

$$\boxed{=-\rho gA\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\cos\theta\cdot\delta x\cdot\delta t}\quad(3)$$

(1)=(2)+(3) ゆえに

$$\cancel{\rho}\frac{\partial(Av^2)}{\partial x}\cancel{\delta x\cdot\delta t} = -\cancel{\rho}gA\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cancel{\delta t\cdot\delta x} - \cancel{\rho}gA\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\cos\theta\cdot\cancel{\delta x\cdot\delta t}$$

$$\boxed{\frac{1}{gA}\frac{\partial(Av^2)}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}=0}$$

【重要】開水路の運動量の式

ここで、もしも流線が連続であれば $\partial v/\partial x$ が存在する。このとき

$$\frac{\partial(Av^2)}{\partial x}=v\frac{\partial(Av)}{\partial x}+Av\frac{\partial v}{\partial x}=v\underbrace{\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x}}}_{=0}+Av\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}A\frac{\partial v^2}{\partial x}$$

$$\frac{1}{g\cancel{A}}\frac{1}{2}\cancel{A}\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+\boxed{\cos\theta}\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

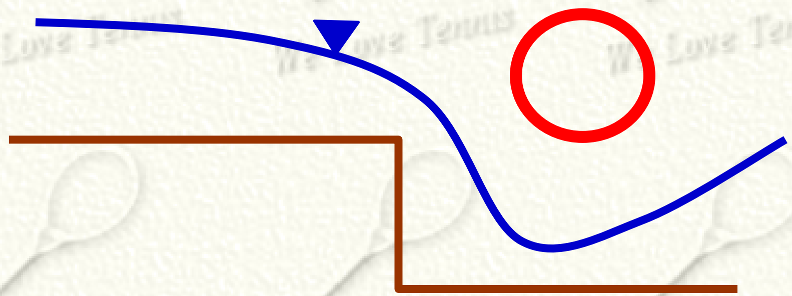
緩勾配の場合は≈ 1

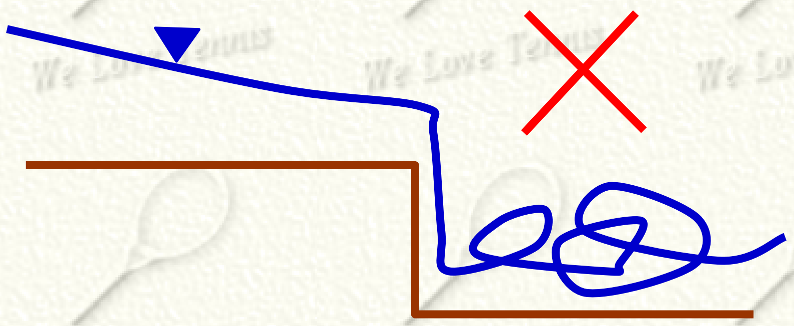
$$\frac{1}{2g}\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}=0 \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(z+h+\frac{v^2}{2g}\right)=0}$$

ベルヌイの式に一致！

ベルヌイの式 $\frac{d}{dx}\left(z+h+\frac{v^2}{2g}\right)=0$ が成立するのは、あくまでも

$\partial v/\partial x$ が存在するとき、すなわち流線が連続しているとき。





不連続流に対しては、運動量の式を用いなければならない。

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial(Av^2)}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

【4】比力の定義と性質

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial (Av^2)}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}=0$$ において、

$A=Bh,\quad \cos\theta\approx 1,\quad B=\mathrm{const.}$ とすると。

$$\frac{1}{g\cancel{B}h}\frac{\partial (\cancel{B}hv^2)}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}=0 \xrightarrow{q=hv} \frac{1}{g}\frac{\partial (qv)}{\partial x}+\boxed{h\frac{\partial z}{\partial x}}+h\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial h^2}{\partial x}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial (qv)}{\partial x}+h\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial h^2}{\partial x}=0 \xrightarrow{x\text{のみの関数}} \frac{d}{dx}\left\{\frac{qv}{g}+\frac{h^2}{2}\right\}+h\frac{dz}{dx}=0$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left\{\boxed{\frac{q^2}{gh}+\frac{h^2}{2}}\right\}+h\frac{dz}{dx}=0}$$

【重要】長方形断面の運動量式

$$\boxed{F\equiv\frac{q^2}{gh}+\frac{h^2}{2}}$$ 比力(Specific Force)

$\partial z/\partial x=0$ のとき、比力は一定に保たれる。

$$F=\frac{q^2}{gh}+\frac{h^2}{2}$$

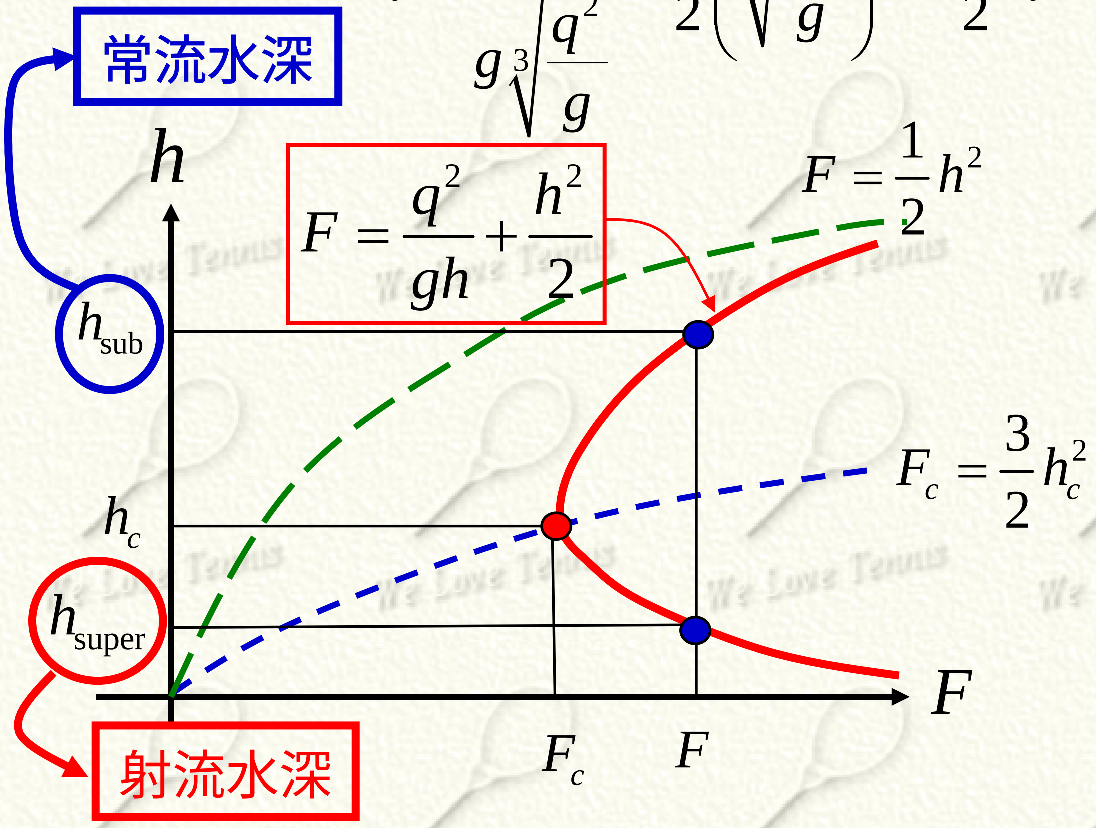
q が一定のとき F と h の関係を調べる。極値を調べる。

$$\frac{\partial F}{\partial h}=-\frac{q^2}{gh^2}+h=0 \longrightarrow h^3=\frac{q^2}{g} \quad \rightarrow \quad h=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}\equiv h_c$$

: 限界水深

このとき、

$$F_c=\frac{v^2}{g\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}}+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}\right)^2=\frac{3}{2}h_c^2$$



重要

- 限界水深は流量 q が一定のとき比力 F を最小にする水深である。
- $h=h_c$ のとき $F_c=\frac{3}{2}h_c^2$ をとる
- 同一の F に対して同一の q を与える常流水深と射流水深が存在する

次に $F = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2}$ を変形して、

$$ghF = q^2 + \frac{gh^3}{2} \quad \rightarrow \quad q^2 = gh(F - \frac{1}{2}h^2) = ghF - \frac{1}{2}gh^3$$

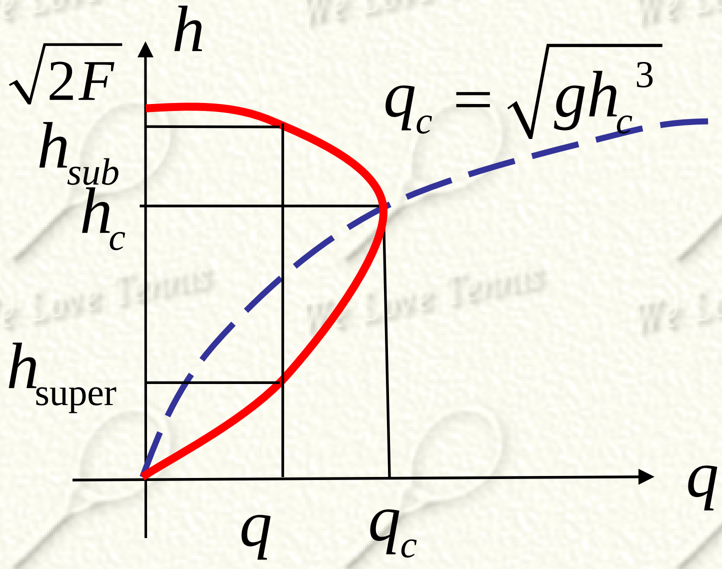
$F = \mathrm{Const}$ において極値を調べる。

$$\frac{\partial q^2}{\partial h} = gF - \frac{3}{2}gh^2 = 0 \quad \rightarrow \quad h_c = \sqrt[3]{\frac{2}{3}F}$$ このとき、

$$q^2 = g\sqrt{\frac{2}{3}F}\left\{F - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}F\right\} = g\sqrt{\frac{2}{3}F}\cdot\frac{2}{3}F = g\left(\frac{2}{3}F\right)^{\frac{3}{2}} = g(h_c{}^2)^{\frac{3}{2}} = gh_c{}^3$$

$$\therefore q_c = \sqrt{gh_c{}^3}$$

$\boxed{q = 0 \quad \text{at} \;\; h = 0 \text{ and } h = \sqrt{2F}}$



まとめ

•限界水深は比力 F が一定のとき流量 q を最大にする水深である。

• $h = h_c$ において最大流量 $q_c = \sqrt{g h_c^{\,3}}$ をとる。

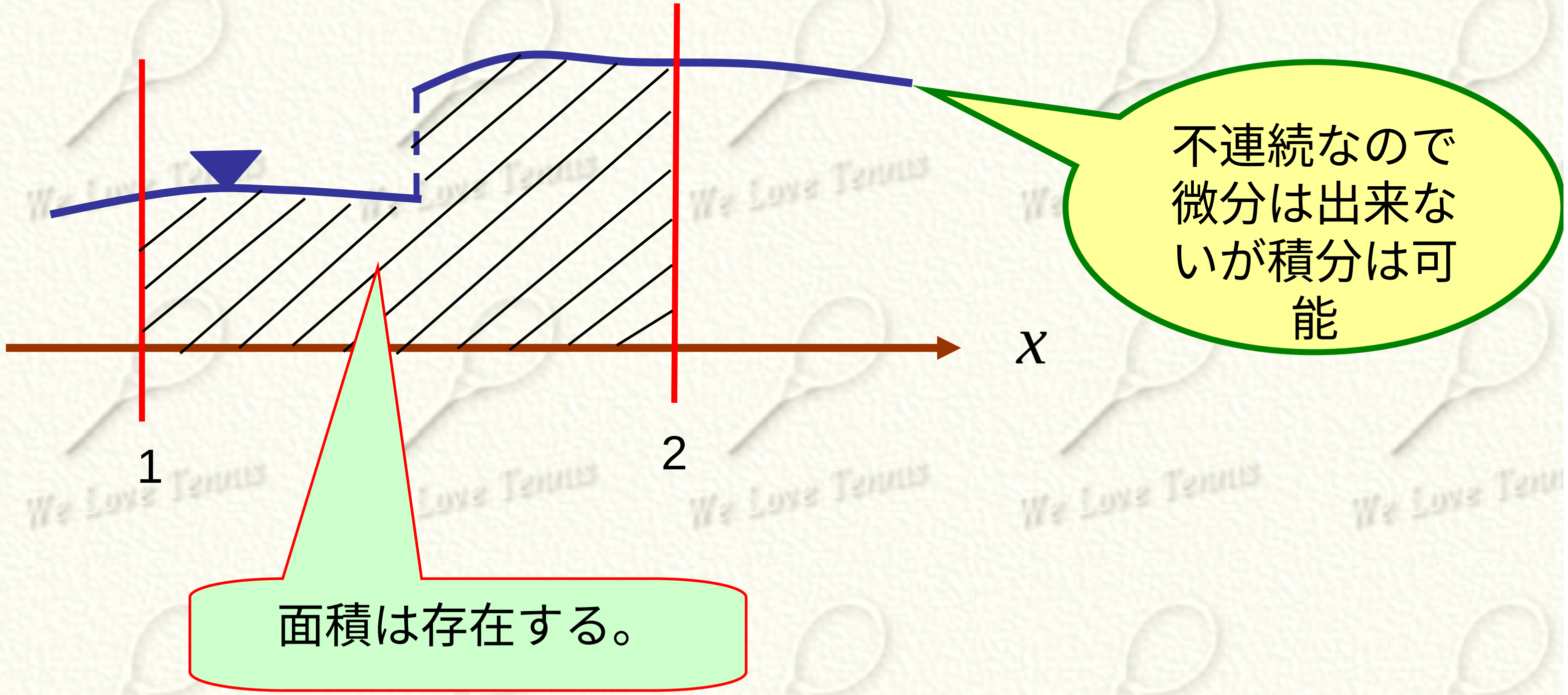
•あるいは $h = h_c = \sqrt{\frac{2}{3}F}$ において $q_c = \sqrt{q\left(\frac{2}{3}F\right)^{\frac{3}{2}}}$

同一の流量 q に対して同じ F の値をとる常流水深と射流水深が存在する。

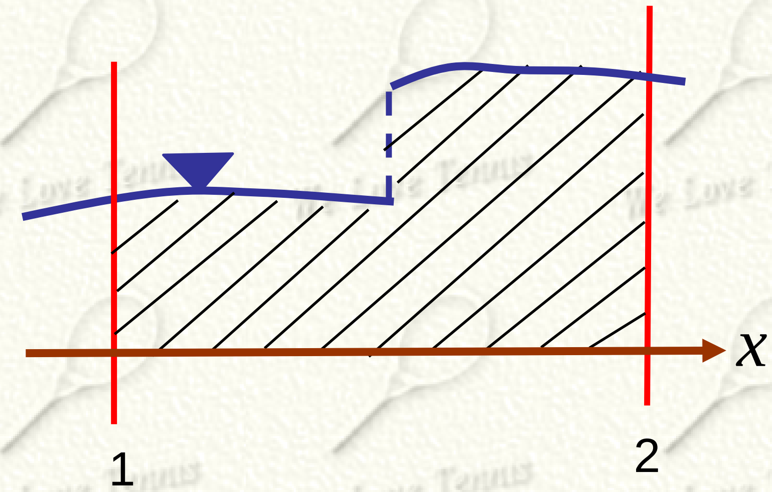
【5】不連続流への運動量式の適用

流線が不連続な流れに対してはベルヌイ式を用いることが出来ない。

このような場合は運動量の式を不連続点（面）をまたいで必要な区間積分する。



$$\frac{\partial z}{\partial x}=0$$ の場合は特に簡単で、



$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{gh}+\frac{1}{2}h^2\right)dx=\left[\frac{q^2}{gh}+\frac{1}{2}h^2\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{q^2}{gh_2}+\frac{1}{2}h_2{}^2\right)-\left(\frac{q^2}{gh_1}+\frac{1}{2}h_1{}^2\right)=0$$

（定積分ゆえゼロとなる。）

ゆえに

$$\left(\frac{q^2}{gh_2}+\frac{1}{2}h_2{}^2\right)=\left(\frac{q^2}{gh_1}+\frac{1}{2}h_1{}^2\right)$$

h_2 が与えられれば h_1 を求めることができ、その逆も言える。

運動量保存
（比力保存）

$$\frac{q^2}{gh_2}+\frac{1}{2}h_2^2=\frac{q^2}{gh_1}+\frac{1}{2}h_1^2$$

エネルギー保存
（比エネルギー）

$$\frac{q^2}{2gh_2^2}+h_2=\frac{q^2}{2gh_1^2}+h_1 \quad -\Delta E$$

損失エネルギー

明らかに違う！！！

開水路の運動量保存則は流線連続の条件のもとでベルヌイ式（比エネルギー）に一致するが、不連続の場合は積分を通じて全く別の式となる。

この両者の関係を用いてエネルギー損失量を求めることができる。

$$\frac{q^2}{2gh_2^2}+h_2=\frac{q^2}{2gh_1^2}+h_1-\Delta E$$

$$\boxed{\Delta E=h_1-h_2+\frac{q^2}{2g}\left(\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)}$$