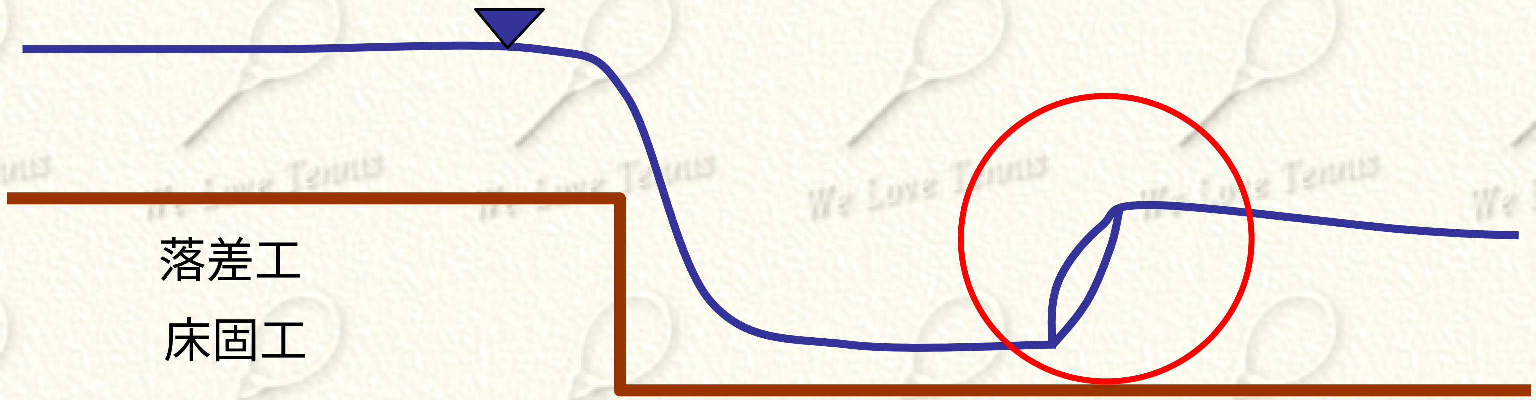
３－２　跳水の水理と不連続急拡・急縮水路の流れ

Text3.6(上)p91-100

(1) 跳水の水理

① 跳水現象



•射流から常流への遷移過程において生ずる。

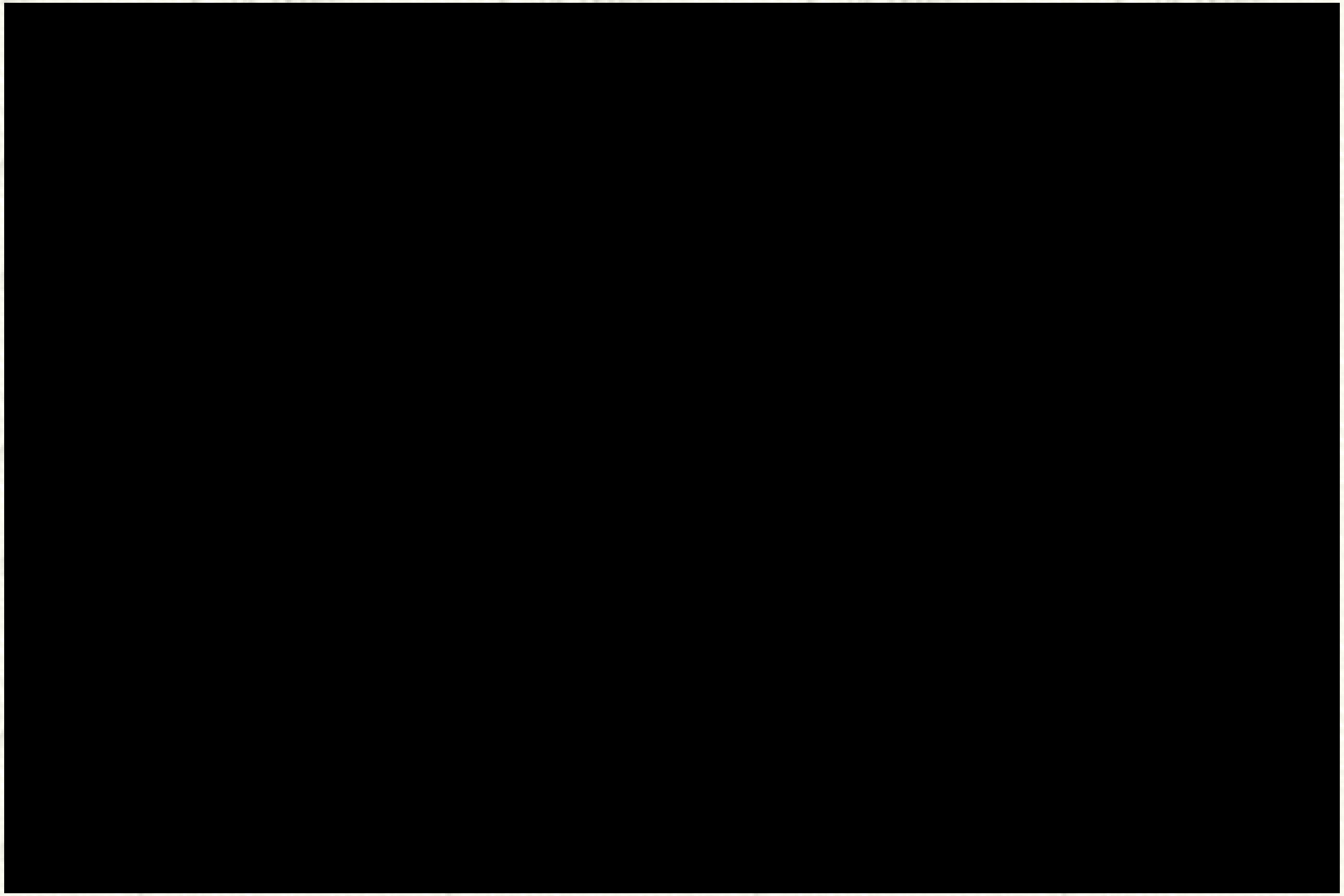
•流線の不連続が起きる。したがって、流速、水深、エネルギー水頭の不連続が生じている。ただし、流量、運動量の連続性は一般に維持されている。

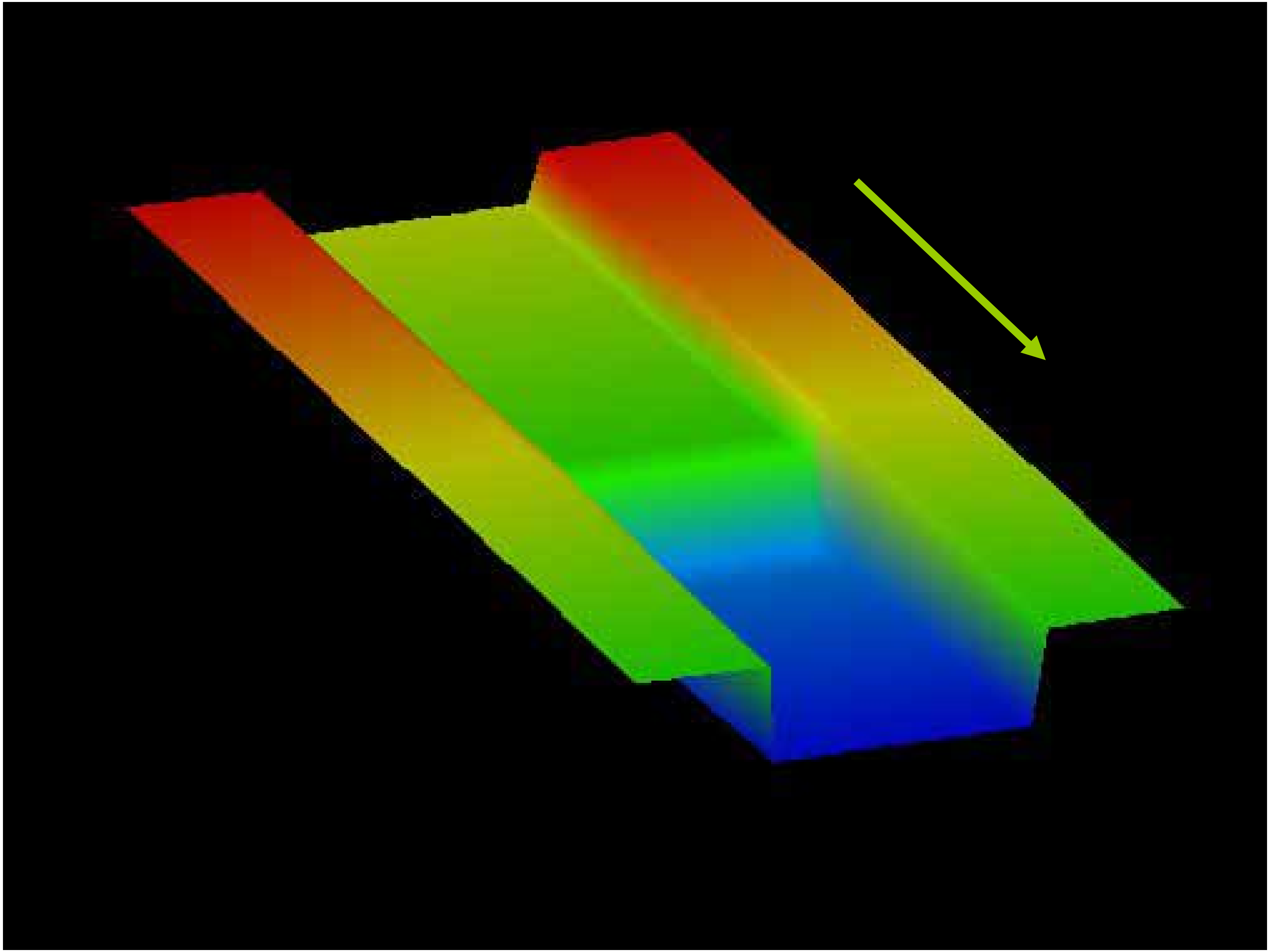
•フルード数(Fr)によってタイプが分かれる。

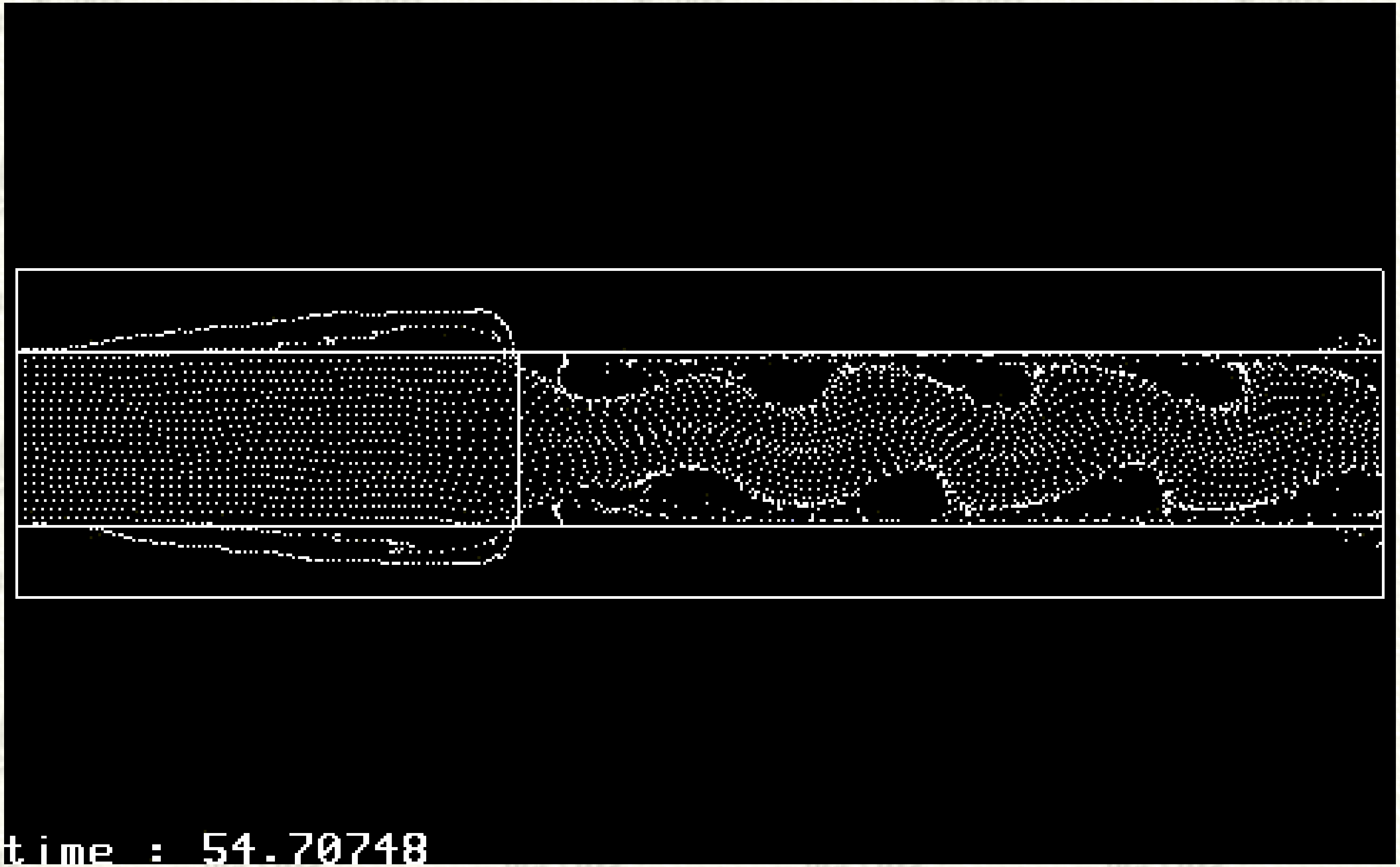

豊平川と札幌市
落差工
落差工
複断面
交互砂州
落差工

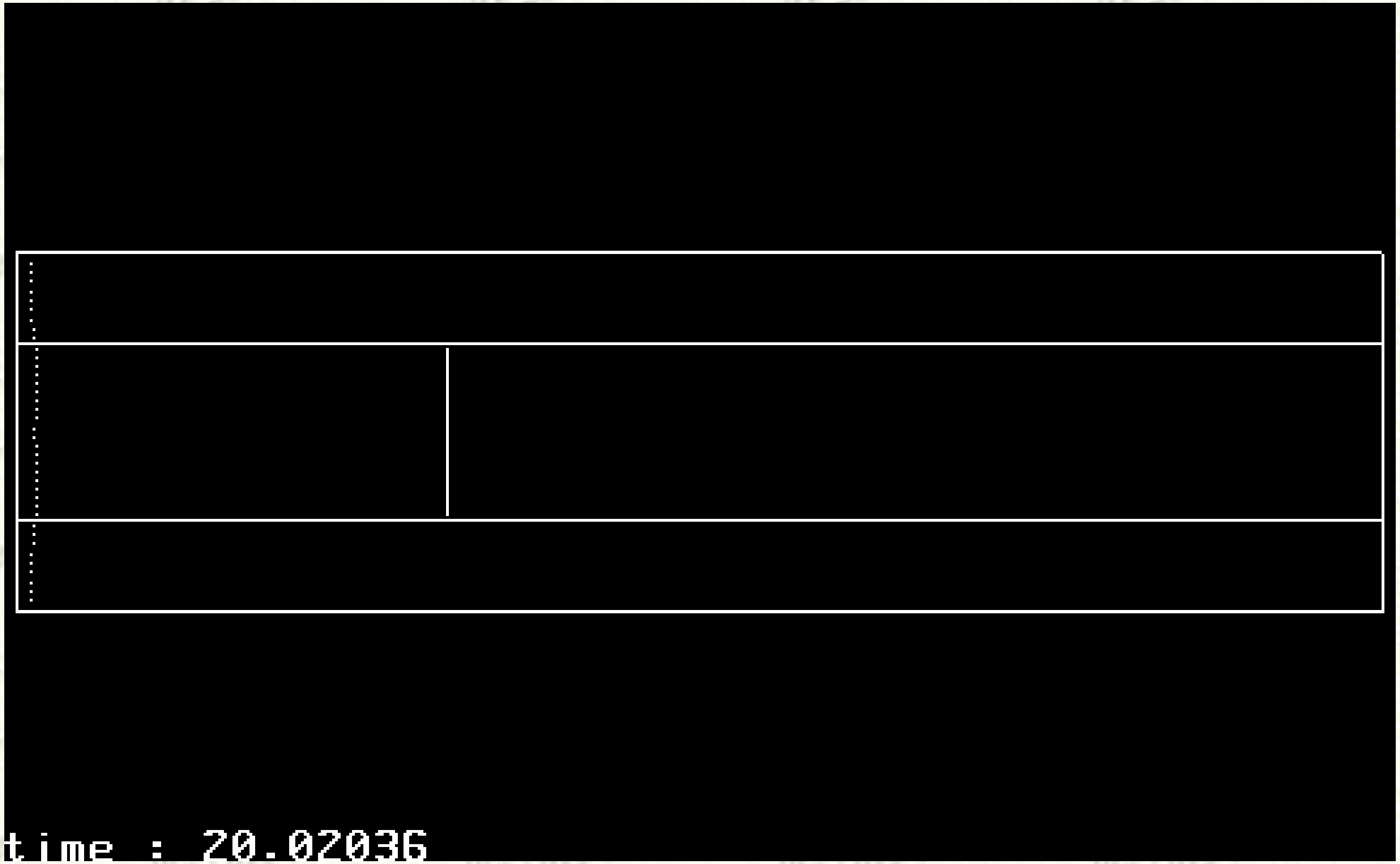
Flood of Aug. 5, 1981

Triangle-shape surface waves

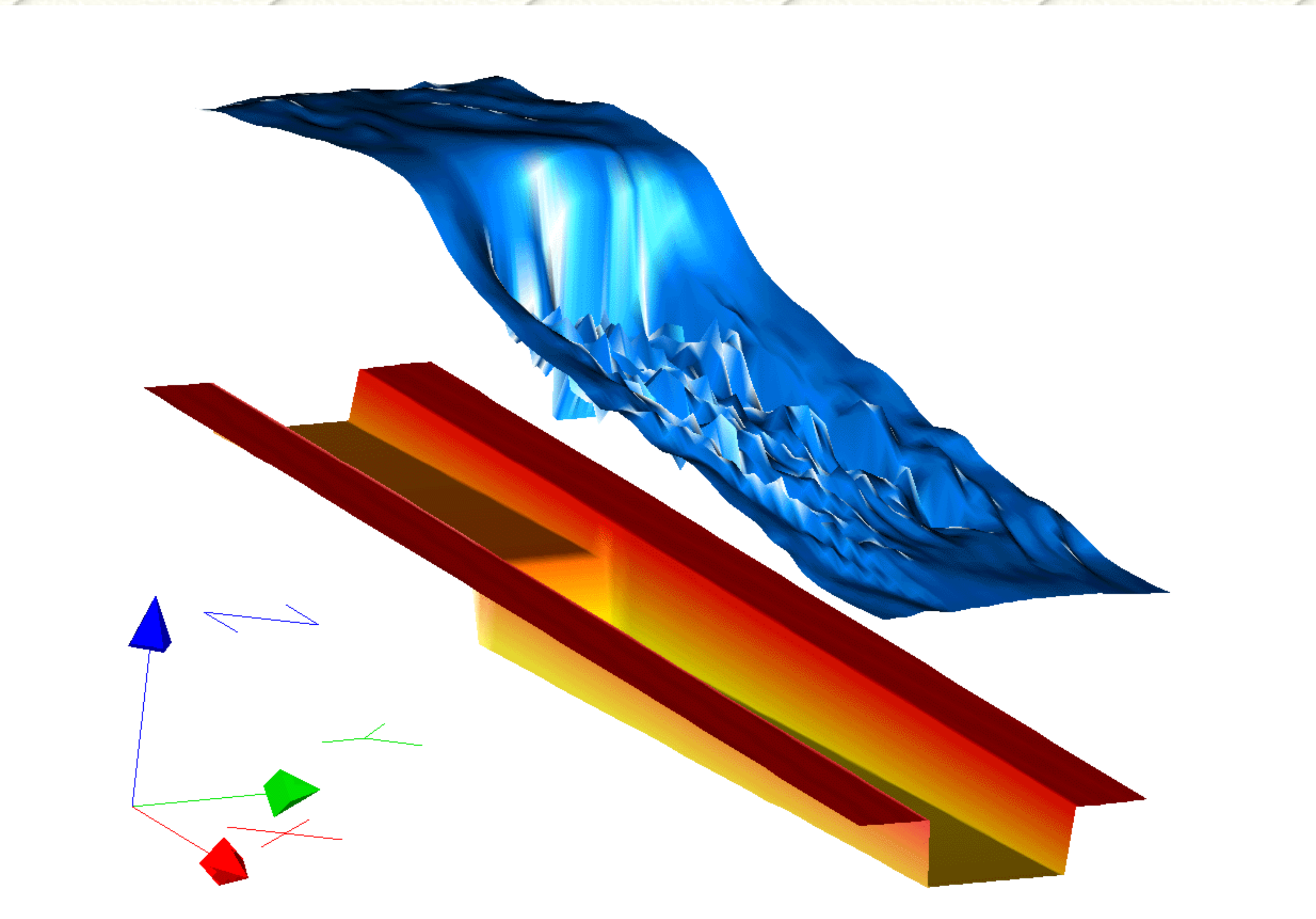


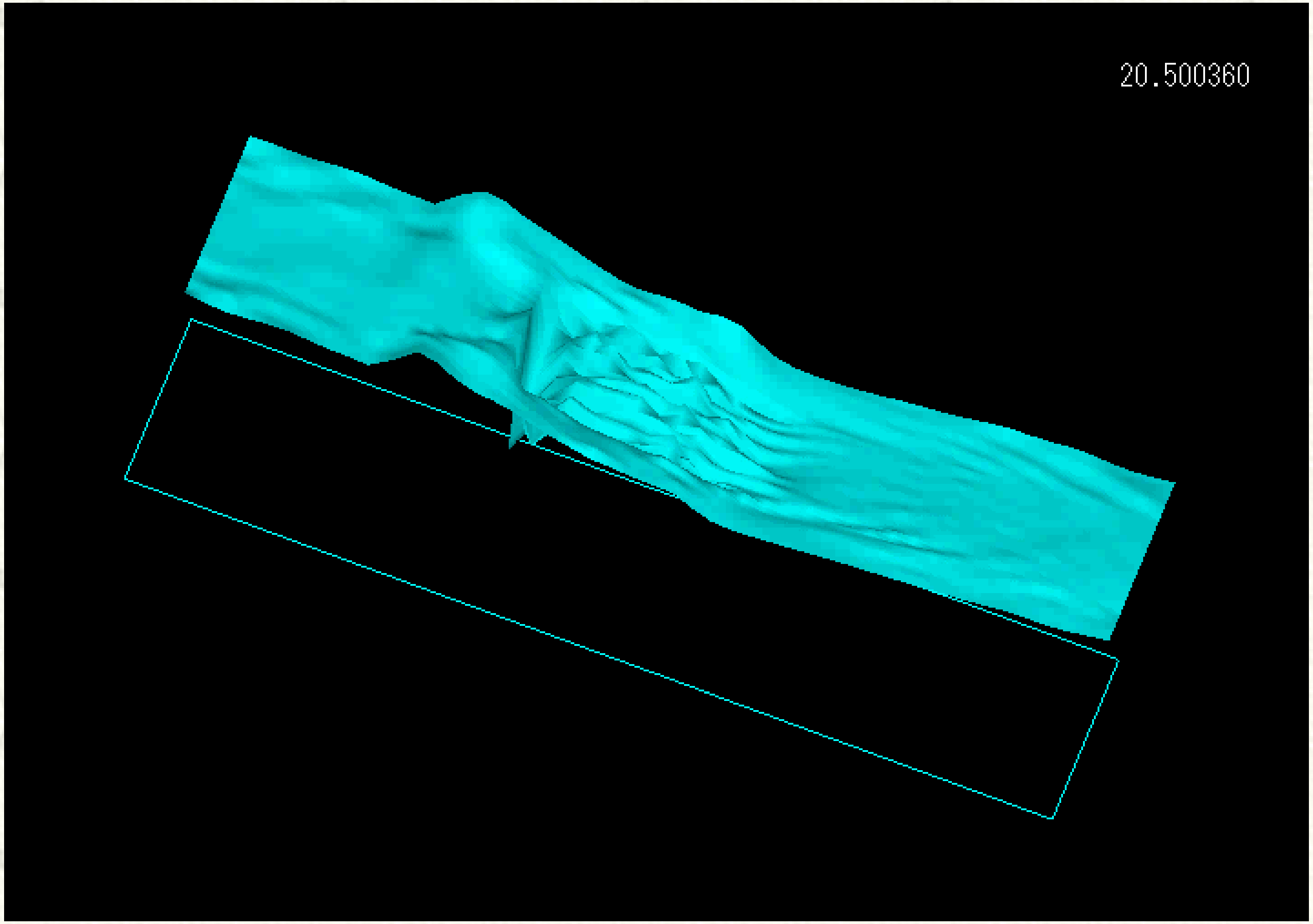


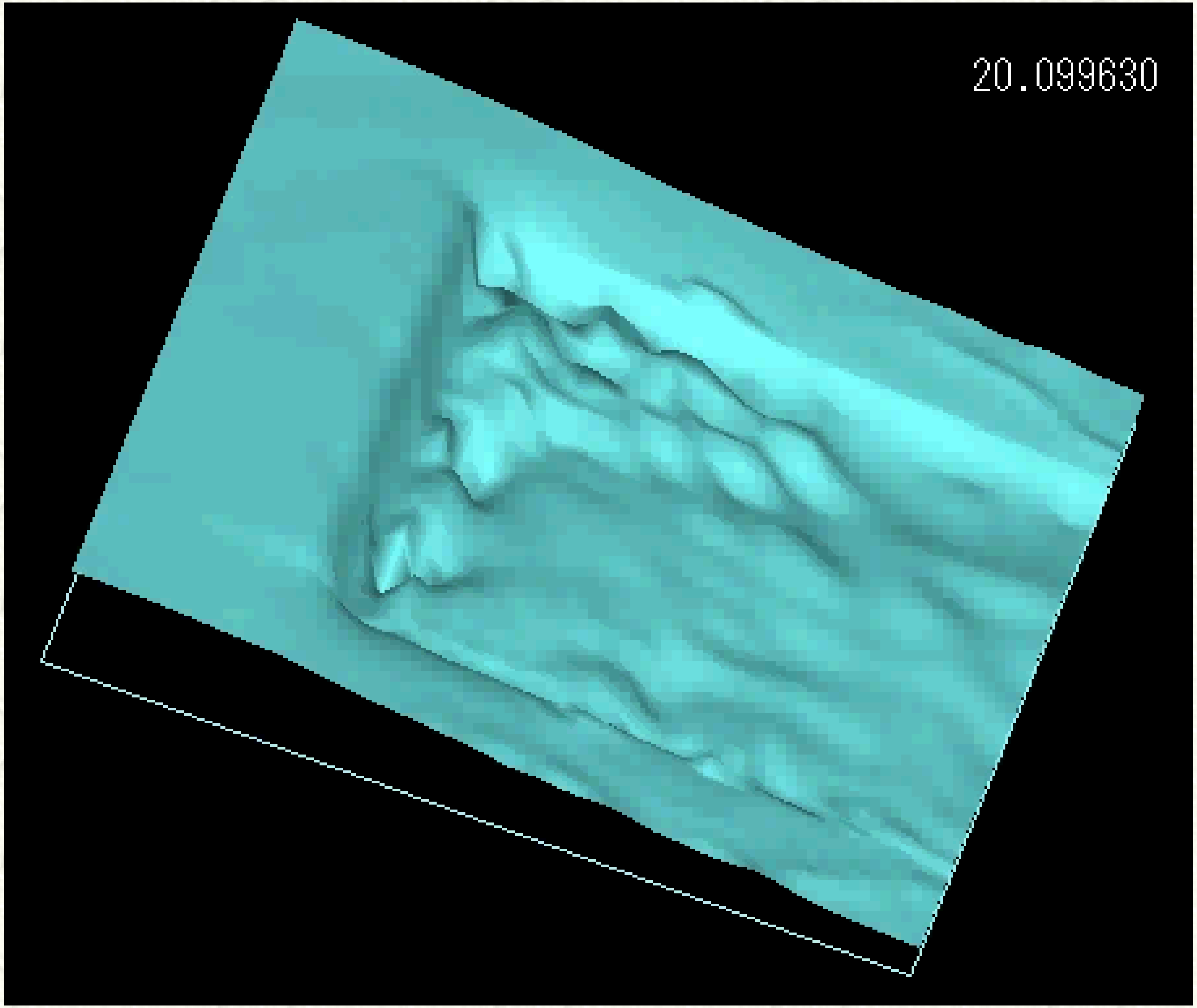

time : 54.70748

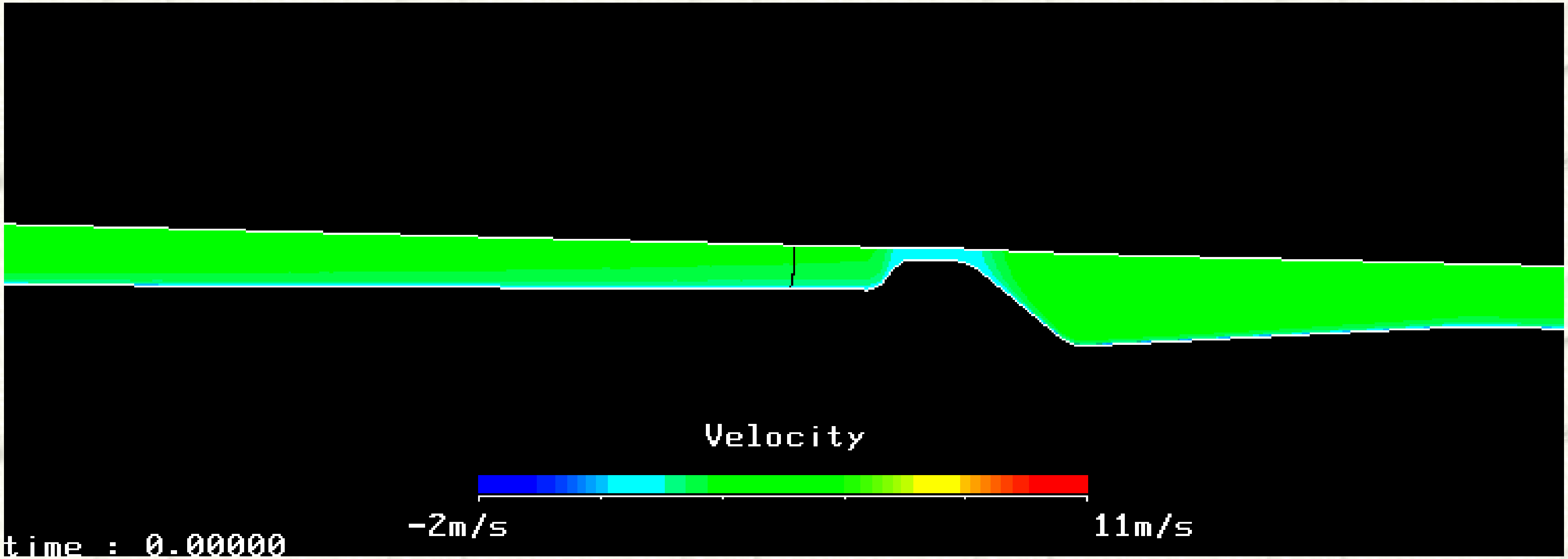

time : 20.02036

Calculated water surface profile

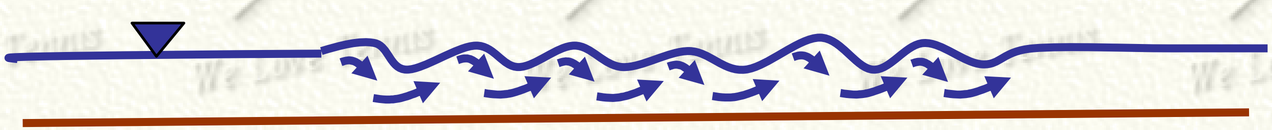



20.500360


20.099630

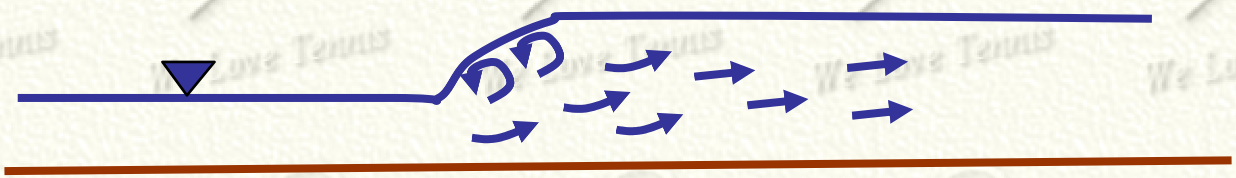

Velocity
-2m/s
11m/s
time : 0.00000

(a)波状跳水(Undular Jump)　　Fr=1.0～1.7



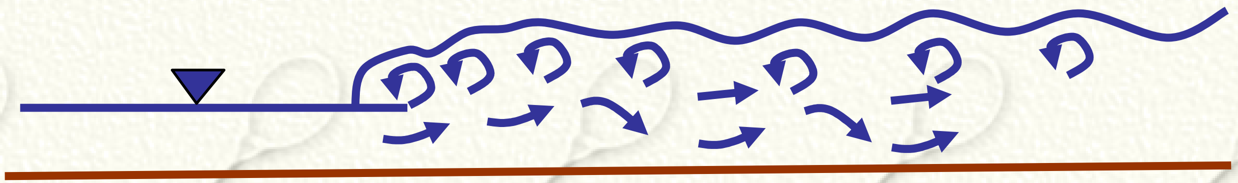
水面がわずかに乱れて波状を呈する。エネルギー損失はほとんどない。

(b) 弱跳水(Weak Jump)　Fr=1.7～2.5



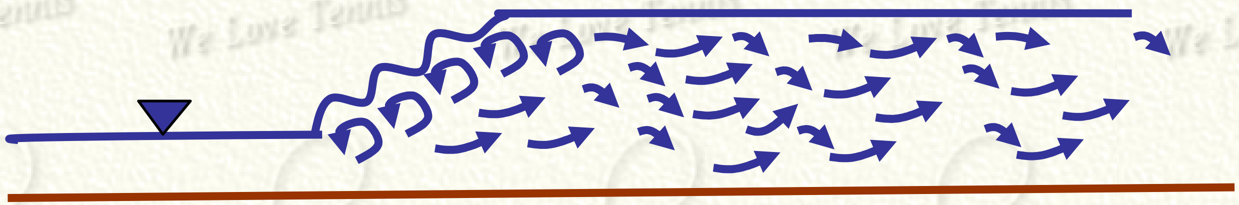
表面に水平軸をもつ流速の小さな渦が形成される。下流の水面は静穏

(c) 動揺跳水(Oscillating Jump) Fr=2.5～4.5



流入ジェ　　　　　　　　　　　　　　　　　たり、表面に沿って
流れたり　　　　　　　　　　　　　　　　　が下流に伝わる。

(ｄ)定常跳水(Steady Jump)　　Fr=4.5～9.0

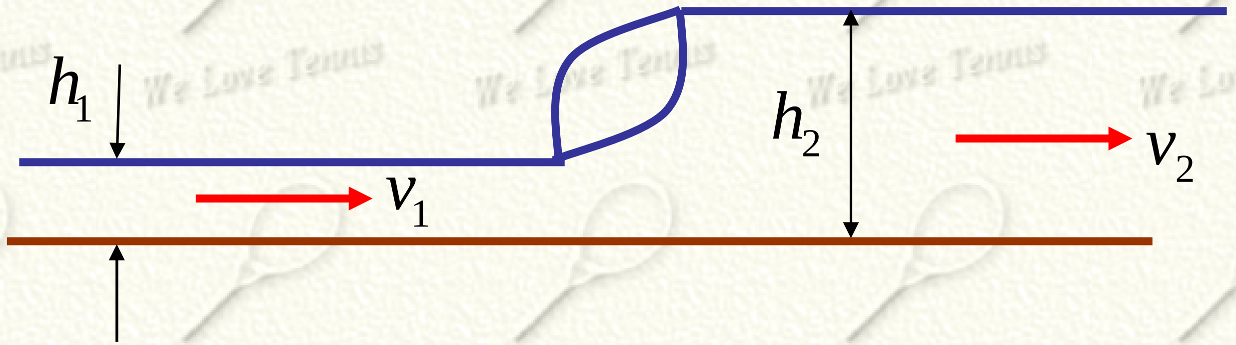


安定しており、下流水面は比較的静穏

(e) 強跳水(Stro

内部におけ　　　　る。

(2) 跳水水深



連続式　$q = h_1 v_1 = h_2 v_2$

運動量式
(比力式)
$$\frac{q^2}{gh_1} + \frac{1}{2}h_1^2 = \frac{q^2}{gh_2} + \frac{1}{2}h_2^2$$

$$\frac{v_1^2}{gh_1} = \frac{q^2}{gh_1^3} = Fr_1^{\ 2}$$

とおくと運動量式は

$$Fr_1^{\ 2}\frac{h_1^{\ 3}}{h_2} + \frac{1}{2}h_2^2 = Fr_1^{\ 2}h_1^{\ 2} + \frac{1}{2}h_1^2$$

両辺を $\frac{1}{2}h_1^{\ 2}$ で割ると

$h_2 / h_1 = X$ とおくと、

$$2Fr_1^{\ 2}\boxed{\frac{h_1}{h_2}} + \left(\boxed{\frac{h_2}{h_1}}\right)^2 = 2Fr_1^{\ 2} + 1$$

$$2Fr_1^2\frac{1}{X}+X^2=2Fr_1^2+1 \qquad X^3-2Fr_1^2X-X+2Fr_1^2=0$$

$$X(X^2-1)-2Fr_1^2(X-1)=0 \qquad X(X-1)(X+1)-2Fr_1^2(X-1)=0$$

$$(X-1)\left\{X(X+1)-2Fr_1^2\right\}=0$$

$X=1$ すなわち $h_2=h_1$ は意味を持たない

$$\therefore X(X+1)-2Fr_1^2=0 \qquad X^2+X-2Fr_1^2=0$$

$$X=\frac{1}{2}\left\{-1\pm\sqrt{8Fr_1^2+1}\right\}$$

$X>0$ なので

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{8Fr_1^2+1}-1\right\}}$$

h_1 と h_2 を共役水深という。重要

(3) 跳水によるエネルギー損失

運動量保存（比力保存） → $$\frac{q^2}{gh_2}+\frac{1}{2}h_2^{\,2}=\frac{q^2}{gh_1}+\frac{1}{2}h_1^{\,2}$$

エネルギー保存（比エネルギー） → $$\frac{q^2}{2gh_2^{\,2}}+h_2=\frac{q^2}{2gh_1^{\,2}}+h_1-\Delta E$$

損失エネルギー

$$\frac{q^2}{2gh_2^{\,2}}+h_2=\frac{q^2}{2gh_1^{\,2}}+h_1-\Delta E$$

$$\boxed{\Delta E=h_1-h_2+\frac{q^2}{2g}\left(\frac{1}{h_1^{\,2}}-\frac{1}{h_2^{\,2}}\right)}=h_1-h_2+\frac{q^2}{2g}\frac{h_2^{\,2}-h_1^{\,2}}{(h_1h_2)^2}$$

$$=(h_1-h_2)\left\{1-\frac{q^2}{2g}\frac{h_2+h_1}{(h_1h_2)^2}\right\}=(h_1-h_2)\left\{1-\frac{q^2}{2gh_1h_2}\frac{h_2+h_1}{h_1h_2}\right\}$$

$$\frac{q^2}{2gh_1h_2} = \frac{q^2}{2gh_1^{\,3}}\frac{h_1^{\,2}}{h_2} = \frac{1}{2}\frac{v_1^{\,2}}{gh_1}\frac{h_1}{h_2}h_1 = \cancel{\frac{1}{2}}Fr_1^{\,2}\frac{h_1}{\cancel{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{8Fr_1^{\,2}+1}-1\right\}}$$

$$= Fr_1^{\,2}\frac{\sqrt{8Fr_1^{\,2}+1}+1}{\left\{\sqrt{8Fr_1^{\,2}+1}-1\right\}\left\{\sqrt{8Fr_1^{\,2}+1}+1\right\}}h_1 \quad = \cancel{Fr_1}^{\,2}\frac{\sqrt{8Fr_1^{\,2}+1}+1}{8\cancel{Fr_1}^{\,2}\cancel{+1}\cancel{-1}}h_1$$

$$= \frac{1}{8}\left(\sqrt{8Fr_1^{\,2}+1}+1\right)h_1 \quad = \frac{1}{4}\left(\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{8Fr_1^{\,2}+1}-\frac{1}{2}}+1\right)h_1$$

$$\frac{h_2}{h_1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{h_2}{h_1}+1\right)h_1 \quad = \frac{1}{4}\left(\frac{h_2+h_1}{h_1}\right)h_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{h_2+h_1}{\cancel{h_1}}\right)\cancel{h_1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(h_2+h_1\right)$$

$$\Delta E=(h_1-h_2)\left\{1-\frac{q^2}{2gh_1h_2}\frac{h_2+h_1}{h_1h_2}\right\}=(h_1-h_2)\left\{1-\frac{h_1+h_2}{4}\frac{h_2+h_1}{h_1h_2}\right\}$$

$$=(h_1-h_2)\left\{\frac{\boxed{4h_1h_2-(h_1+h_2)^2}}{4h_1h_2}\right\}=(h_1-h_2)\left\{\frac{-(h_1-h_2)^2}{4h_1h_2}\right\}=-\frac{(h_1-h_2)^3}{4h_1h_2}$$

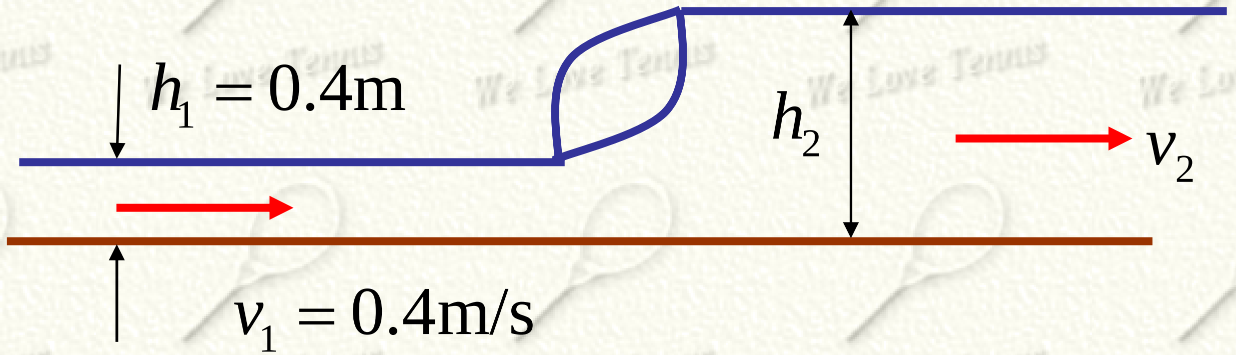
$$-h_1{}^2+2h_1h_2-h_2{}^2=-(h_1{}^2-2h_1h_2+h_2{}^2)=-(h_1-h_2)^2$$

$$\boxed{\therefore \Delta E=\frac{(h_2-h_1)^3}{4h_1h_2}}$$

重要　エネルギー損失を共役水深で表現

$h_2>h_1$　ゆえに　$\Delta E>0$

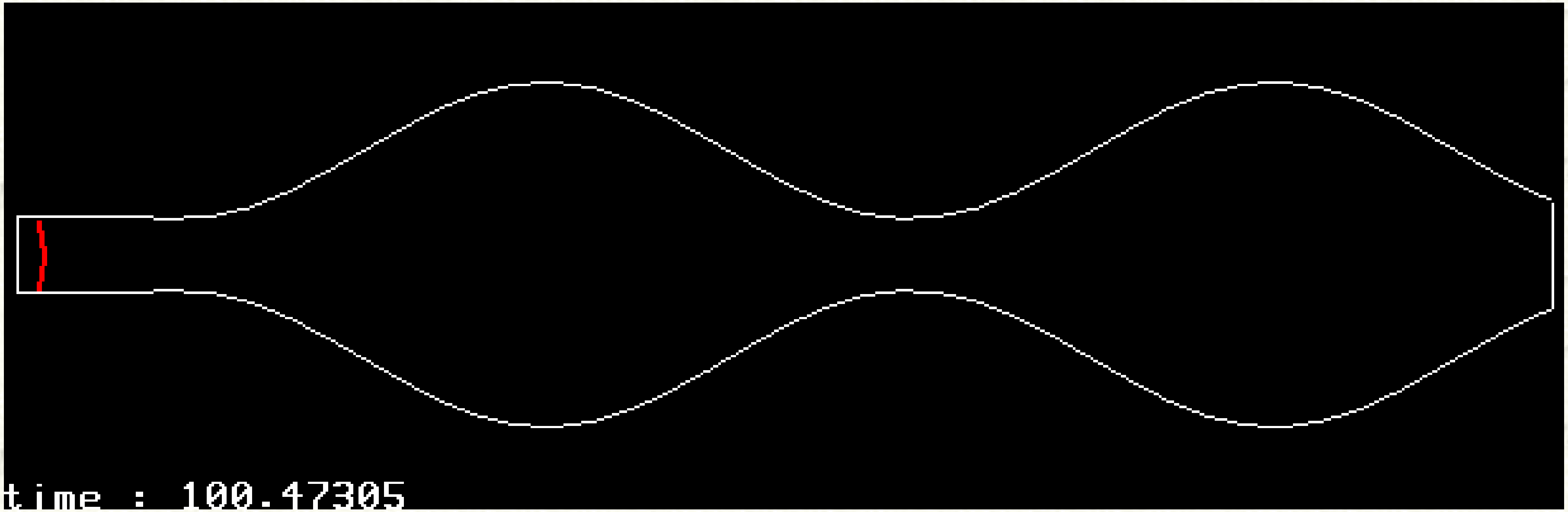
【問題１】



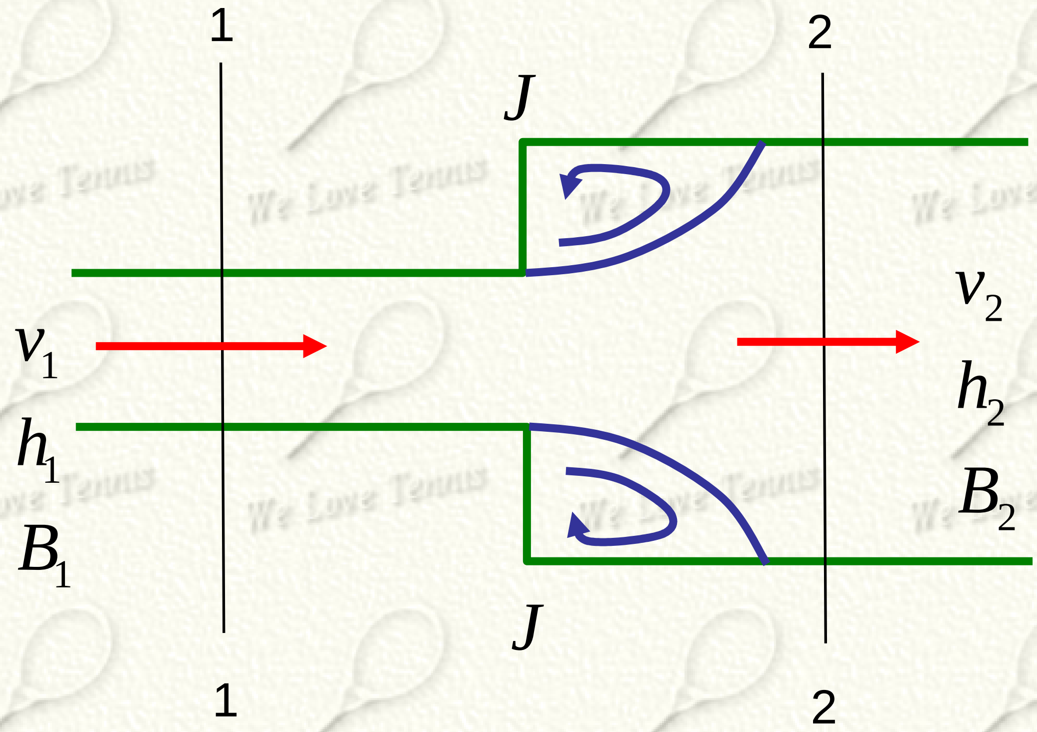
(1) 共役水深 h_2 はいくらか？

(2) この跳水による損失はいくらか？

(2) 断面急拡・急縮水路における流れ



急拡　急縮　急拡　急縮



長方形断面
底面水平
の急拡幅水路

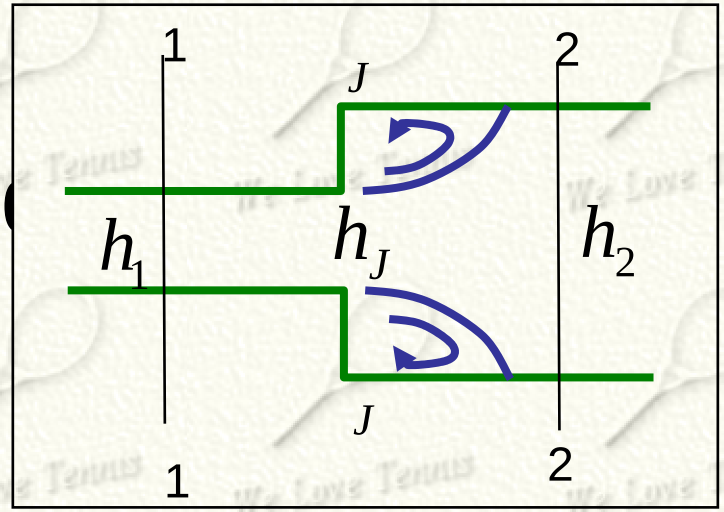
開水路の運動量方程式 $$\frac{1}{gA}\frac{\partial(Av^2)}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

$\cos\theta=1,\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\quad A=Bh$ なので、

$$\frac{1}{g}\frac{\partial(Bhv^2)}{\partial x}+Bh\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

不連続部分をはさんで1～2で積分する

$$\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial(Bhv^2)}{\partial x}dx + \int_1^2 \frac{1}{2}B\frac{\partial h^2}{\partial x}dx = 0$$



$$\frac{1}{g}\left[Bhv^2\right]_1^2 + \boxed{\int_1^2 \frac{1}{2}B\frac{\partial h^2}{\partial x}dx} = 0$$

ここで

$$\int_1^2 \frac{1}{2}B\frac{\partial h^2}{\partial x}dx = \int_1^J \frac{1}{2}B\frac{\partial h^2}{\partial x}dx + \int_J^2 \frac{1}{2}B\frac{\partial h^2}{\partial x}dx$$

$$= \frac{1}{2}B_1\int_1^J \frac{\partial h^2}{\partial x}dx + \frac{1}{2}B_2\int_J^2 \frac{\partial h^2}{\partial x}dx = \frac{1}{2}B_1\left[h^2\right]_1^J + \frac{1}{2}B_2\left[h^2\right]_J^2$$

$$= \frac{1}{2}B_1\left[h_J^2 - h_1^2\right] + \frac{1}{2}B_2\left[h_2^2 - h_J^2\right]$$

$h_J \approx h_1$ とみられるので

$$= 0 + \boxed{\frac{1}{2}B_2\left[h_2^2 - h_1^2\right]}$$

$$\frac{1}{g}(B_2 h_2 v_2{}^2 - B_1 h_1 v_1{}^2) + \frac{1}{2} B_2 (h_2{}^2 - h_1{}^2) = 0$$

$$B_2 h_2 v_2 = B_1 h_1 v_1 = Q$$ なので $$v_2 = \frac{B_1 h_1}{B_2 h_2} v_1$$

$$\frac{1}{g}\left\{ \cancel{B_2 h_2} \frac{(B_1 h_1)^2}{(B_2 h_2)^{\cancel{2}}} v_1{}^2 - B_1 h_1 v_1{}^2 \right\} + \frac{1}{2} B_2 (h_2{}^2 - h_1{}^2) = 0$$

$$\frac{1}{g}\left(\frac{B_1 h_1}{B_2 h_2} - 1 \right) B_1 h_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} B_2 (h_2{}^2 - h_1{}^2) = 0$$ $B_1 h_1{}^2$ で割って

$$\left(\frac{B_1 h_1}{B_2 h_2} - 1 \right) \frac{v_1{}^2}{g h_1} + \frac{1}{2} \frac{B_2}{B_1} \left(\frac{h_2{}^2}{h_1{}^1} - 1 \right) = 0$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \eta, \quad \frac{h_2}{h_1} = X, \quad \frac{v_1^{\,2}}{gh_1} = Fr_1^{\,2}$$ とおいて

$$\left(\frac{1}{\eta X} - 1\right) Fr_1^{\,2} + \frac{1}{2}\eta(X^2 - 1) = 0$$

整理して、

$$X^3 - \left(\frac{2}{\eta} Fr_1^{\,2} + 1\right) X + \frac{2}{\eta^2} Fr_1^{\,2} = 0$$

各自調べること。
【試験に出します】

X に関する、３次方程式

３次方程式の根の公式
【Cardanoの公式】

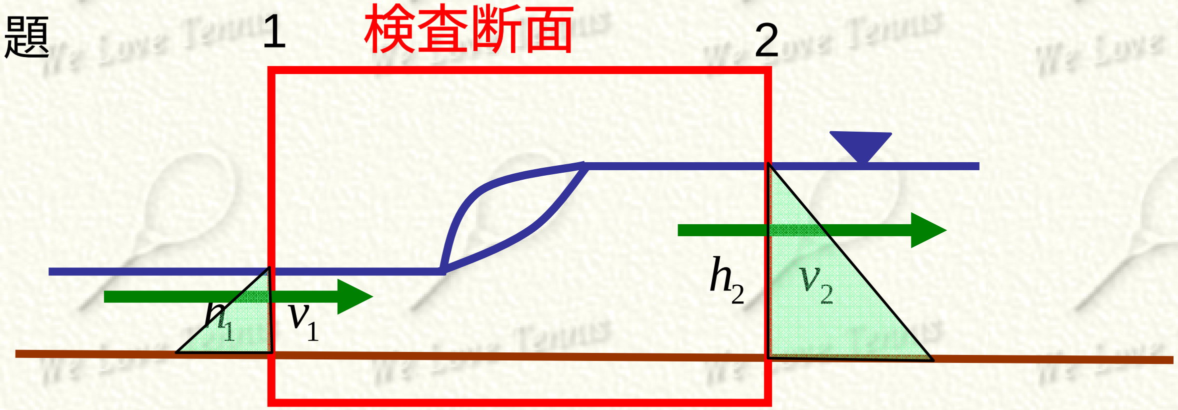
３つの根のうち、実数、正の X より、$\dfrac{h_2}{h_1}$ を決定する。

３－３　検査断面による運動方程式の誘導

Text 3.6 (上)p91～100

【１】基礎方程式の積分によらずに、直接運動量の出入差と外力の関係式をたてるほうが簡単な場合も多い。

(1) 跳水問題



不連続部分を囲んで検査断面を設ける。

流出運動量は＝ $\rho \cdot v_2 h_2 \cdot v_2$

流入運動量は ＝ $\rho \cdot v_1 h_1 \cdot v_1$

圧力差（外力の合計）は

差　$= \rho q(v_2 - v_1) \quad = \dfrac{1}{2}\rho g h_1^{\,2} - \dfrac{1}{2}\rho g h_2^{\,2}$

$$\cancel{\rho} q v_2 + \frac{1}{2}\cancel{\rho} g h_2{}^2 = \cancel{\rho} q v_1 + \frac{1}{2}\cancel{\rho} g h_1{}^2$$

$$v_2 \rightarrow \frac{q}{h_2} \qquad v_1 \rightarrow \frac{q}{h_1}$$

$$\frac{q^2}{g h_2} + \frac{1}{2} h_2{}^2 = \frac{q^2}{g h_1} + \frac{1}{2} h_1{}^2$$

比力保存の式に一致する。以下は解法は同じ。

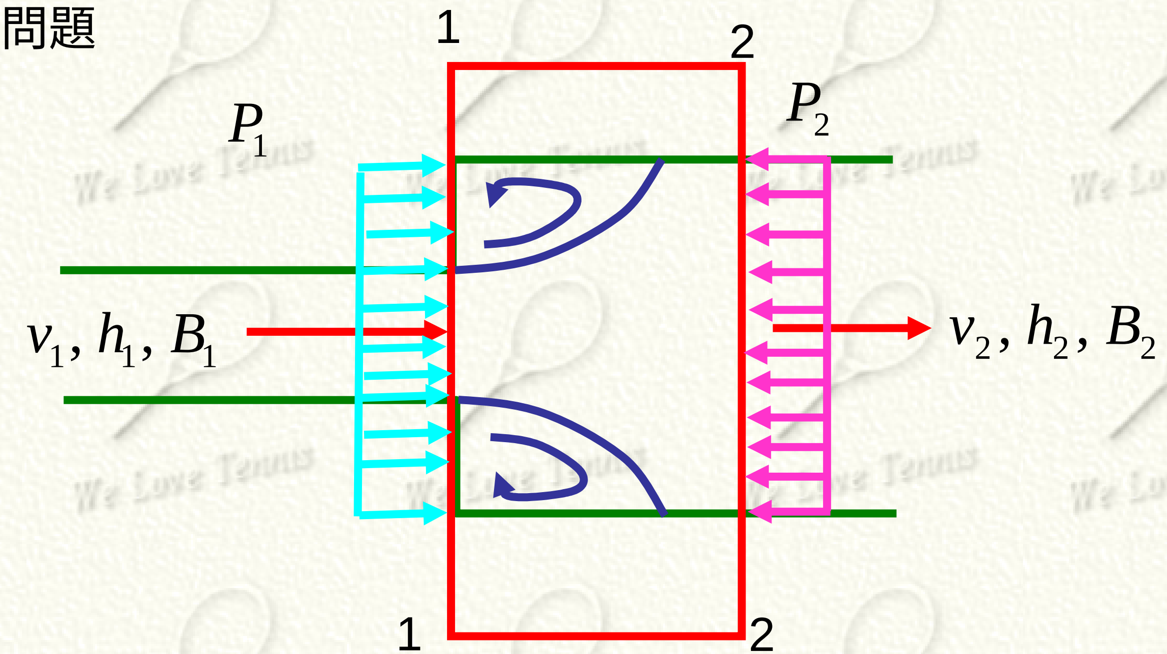
軸方向を正にとる。

このように

流出運動量 − 流入運動量 ＝ 検査面の表面に働く外力の合計

によって、内部が分からなくても解くことが出来る。

（2）急拡問題



流出運動量 − 流入運動量 ＝ 外力（圧力）

$$\cancel{\rho} v_2 \cdot B_2 h_2 v_2 - \cancel{\rho} v_1 \cdot B_1 h_1 v_1 = \frac{1}{2} \cancel{\rho} g h_1^{\ 2} B_2 - \frac{1}{2} \cancel{\rho} g h_2^{\ 2} B_2$$

$$B_2 h_2 v_2^{\ 2} - B_1 h_1 v_1^{\ 2} = \frac{1}{2} \rho B_2 (h_1^{\ 2} - h_2^{\ 2})$$

以下同様

【2】運動量の適用がふさわしいのは、

1. 流線の不連続部分が存在する場合
2. 外力評価が明瞭な場合、または、作用力を求めたい場合
3. 損失評価が難しい場合

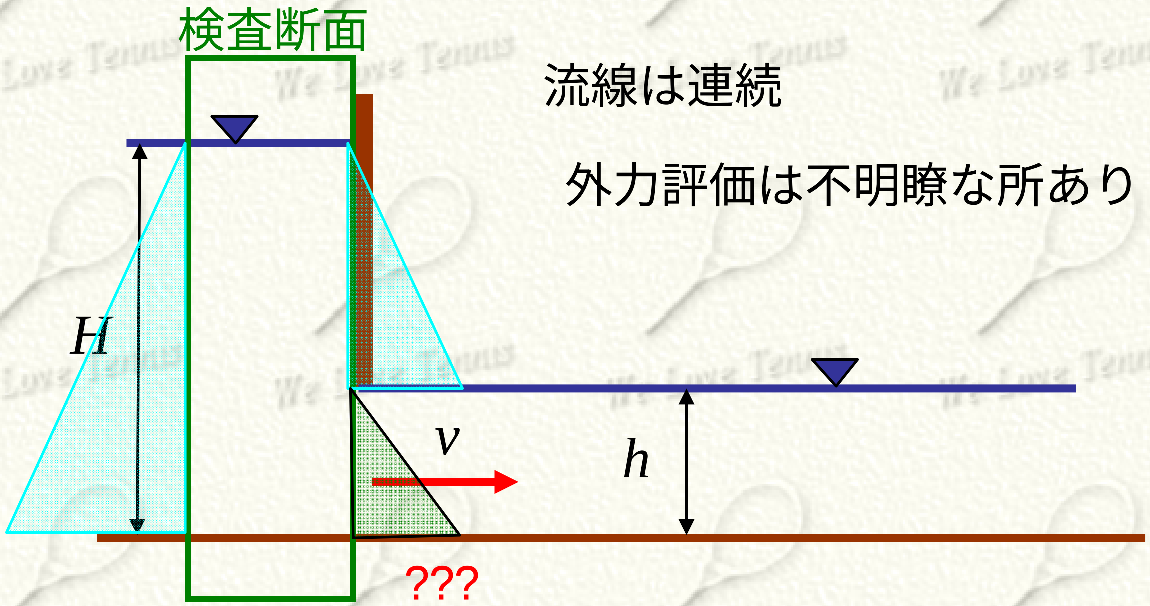
これに対して、ベルヌイの式を用いた方が良いのは、

1. 流線が連続している場合
2. 外力評価が難しい場合
3. 損失評価が明瞭な場合、または損失を求めたい場合

【問題】ゲートから流出する流れの単位幅流量を求めよ。

流線は連続

外力評価は不明瞭な所あり



ベルヌイの式を用いると

$$H+0=h+\frac{v^2}{2g}$$

$$H=h+\frac{1}{2g}\left(\frac{q}{h}\right)^2$$

$$\boxed{q=\sqrt{2g(H-h)}\cdot h^2}$$

合わないのは外力評価が不十分なため

もし、運動量式を用いると、

???

$$\rho vh\cdot v-0=\frac{1}{2}\rho gH^2-\frac{1}{2}\rho g(H-h)^2-\frac{1}{2}\rho gh^2$$

$$\cancel{\rho}\frac{q^2}{h}=\frac{1}{2}\rho g\left\{\cancel{H^2}-\cancel{H^2}+2Hh-h^2-h^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\rho}g\cancel{2}(H-h)h \qquad q^2=g(H-h)h^2$$

$$\boxed{q=\sqrt{g(H-h)}\cdot h}$$