４章　開水路における不等流(２)　漸変流

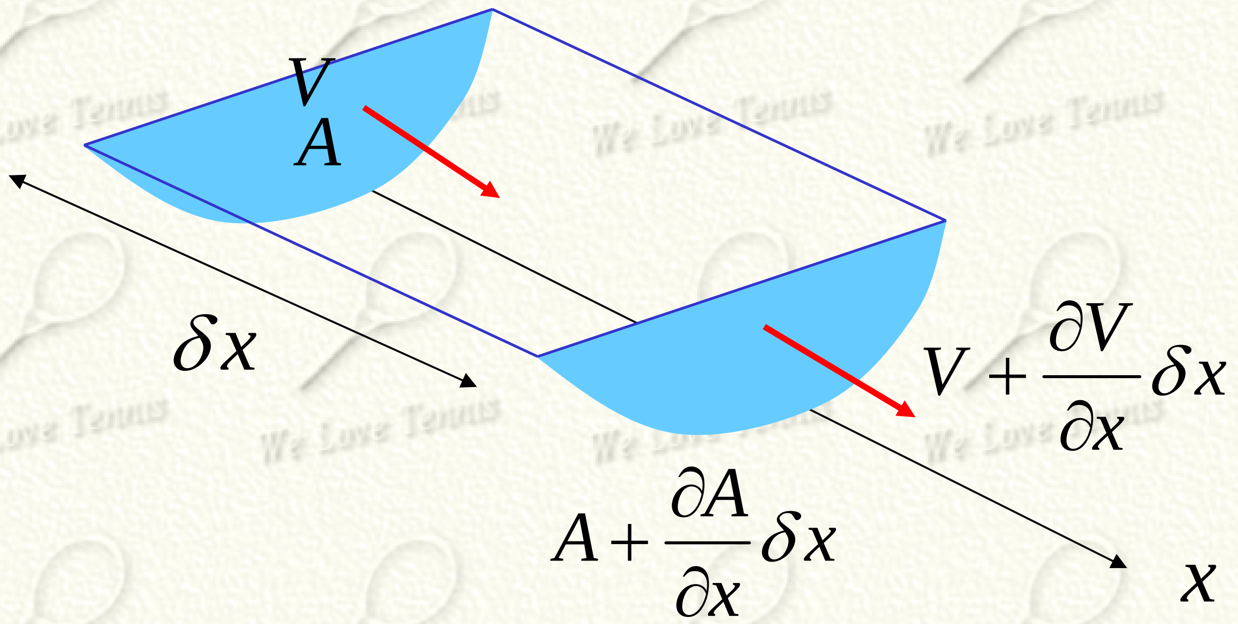
４－１漸変流とは

① 断面形状や底面形状が緩やかに変わる流れ。

② 変化が長区間にわたるので摩擦力が無視できない。

③ 流れが緩やかに変化するので、一般にベルヌイの式を適用するが、
運動量の式を用いた方が良い場合もある。

4－2 不等流における連続式



$$Q = AV = \left(A+\frac{\partial A}{\partial x}\delta x\right)\left(V+\frac{\partial V}{\partial x}\delta x\right)$$

$$= AV + A\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + V\frac{\partial A}{\partial x}\delta x + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\therefore A\frac{\partial V}{\partial x}\cancel{\delta x} + V\frac{\partial A}{\partial x}\cancel{\delta x} = 0$$

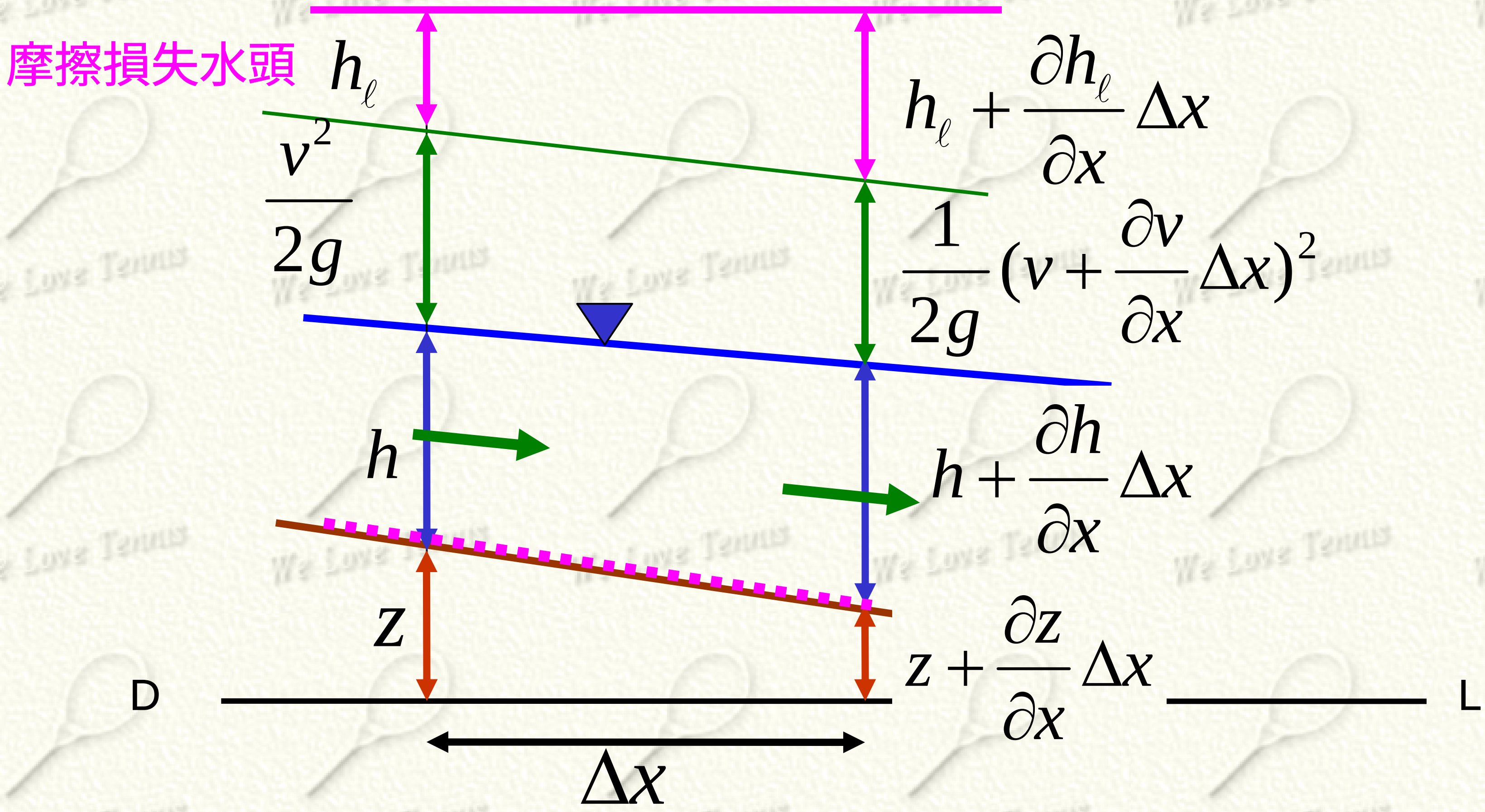
$$\therefore A\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\therefore \dfrac{\partial}{\partial x}(AV) = 0 \\ AV = \text{Constant} = Q\end{array}}$$

4－3 漸変流の水面形方程式と種々の水面形

Text 7.1 (下) P1～7
7.3 (下) P28～35

【1】ベルヌイ式の適用



2断面間にベルヌイ式を立てる

$$\cancel{z}+\cancel{h}+\cancel{\frac{v^2}{2g}}+\cancel{h_\ell}=\cancel{z}+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\cancel{h}+\frac{\partial h}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2g}\boxed{\left(v+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)^2}$$

$$+\cancel{h_\ell}+\frac{\partial h_\ell}{\partial x}\Delta x$$

高次微小項

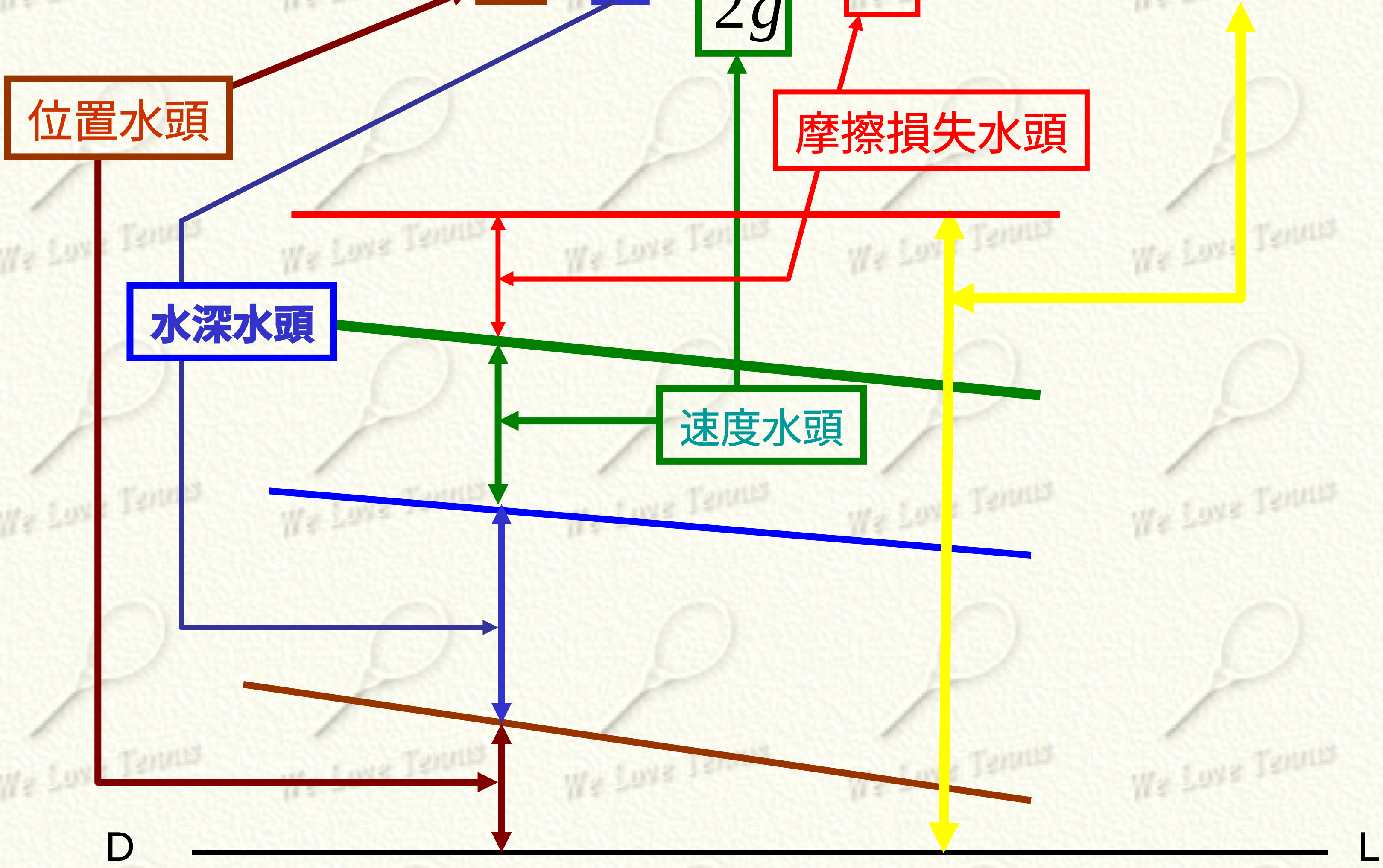
$$v^2+2v\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\cancel{\Delta x^2}\approx\cancel{v^2}+2v\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x=\frac{\partial v^2}{\partial x}\Delta x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{z}_{\text{底面勾配}}+\underbrace{h}_{\text{水深勾配}}+\underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{速度水頭勾配}}+\underbrace{h_\ell}_{\text{損失勾配}}\right)=0$$

$$z+h+\frac{v^2}{2g}+h_\ell$$

$$=\ \text{Constant}$$

$$\boxed{z} + \boxed{h} + \boxed{\frac{v^2}{2g}} + \boxed{h_\ell} = \text{Constant} \quad \text{=総水頭}$$



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z + h + \frac{v^2}{2g} + h_\ell\right) = 0$$

ここで、$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -i, \quad \dfrac{\partial h_\ell}{\partial x} = I_f$ ：摩擦損失勾配　とおくと、

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + I_f = 0$$

$$I_f = i - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$$

エネルギー勾配

１－３【2】で、平均流速公式と損失勾配の関係を示した。

Chezy公式では $$I_f = \frac{v^2}{C^2 R}$$

Manning公式では $$I_f = \frac{n^2 v^2}{R^{\frac{4}{3}}}$$

これらの式は等流における摩擦過程で成立するとしたが、
不等流でも同じ式形が成立する。

この関係を $$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + I_f = 0$$ に代入する。

重要

Chezy型に対して、 $$-i+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{v^2}{C^2R}=0$$

Manning型に対して、 $$-i+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{n^2v^2}{R^{\frac{4}{3}}}=0$$

開水路漸変流の基礎方程式

（注）漸変流の基礎式は用いる平均流速公式によって異なる！

連続式 $Q = Av \quad \rightarrow \quad v = \dfrac{Q}{A}$ より。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = \frac{Q^2}{2g}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A^2}\right) = \frac{Q^2}{\cancel{2}g}\frac{-\cancel{2}}{A^3}\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial x}$$

$$= -\frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{Q^2}{gA^3}\left(\frac{\partial A}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x}\right)$$

これを、 $-i + \dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{v^2}{2g}\right) + \dfrac{v^2}{C^2 R} = 0$ に、代入すると

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{Q^2}{gA^3}\left(\frac{\partial A}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x}\right) + \frac{v^2}{C^2 R} = 0$$

$$\left(1 - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h}\right)\frac{\partial h}{\partial x} = i + \frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{Q^2}{C^2 A^2 R}$$

これより漸変流の水面形方程式はChezy型の場合

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{i+\dfrac{Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial B}\dfrac{\partial B}{\partial x}-\boxed{\dfrac{Q^2}{C^2A^2R}}}{1-\dfrac{Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial h}}$$

急変流（摩擦が無視できる場合）の方程式に新たに加わった項

Manning型の場合

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{i+\dfrac{Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial B}\dfrac{\partial B}{\partial x}-\dfrac{n^2Q^2}{A^2R^{4/3}}}{1-\dfrac{Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial h}}$$

【2】一様幅、広長方形断面水路の場合

Manning

$$-\frac{n^2Q^2}{B^2h^{10/3}}$$

$$A=Bh,\quad R\approx h,\quad \frac{\partial B}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial h}=B$$

Chezy　　Manning

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{i+\cancel{\frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x}}-\frac{Q^2}{C^2B^2h^3}}{1-\frac{Q^2}{gB^3h^3}\cdot\cancel{B}}=i\frac{\boxed{1-\frac{q^2}{i\cdot C^2h^3}}}{\boxed{1-\frac{q^2}{gh^3}}}=i\frac{\boxed{1-\frac{n^2q^2}{i\cdot h^{10/3}}}}{\boxed{1-\frac{q^2}{gh^3}}}$$

2

0

ここで、分母 = 0 とすると $\boxed{h=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=h_c}$ 限界水深

分子 =0 とすると

Chezy $\boxed{h=\sqrt[3]{\frac{q^2}{C^2i}}=h_0}$

Manning $\boxed{h=\left(\frac{n^2q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}}=h_0}$

等流水深

Chezy型

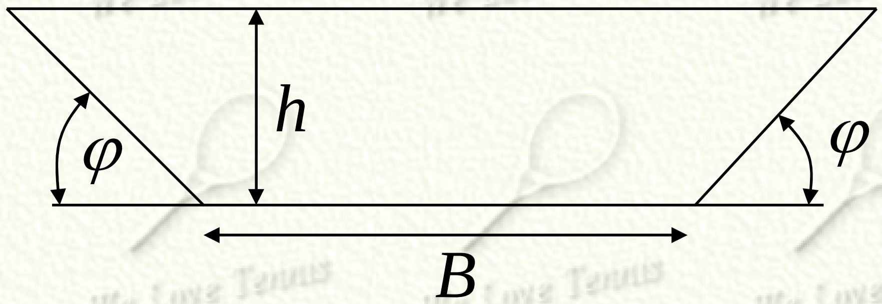
$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\frac{1-\dfrac{h_0{}^3}{h^3}}{1-\dfrac{h_c{}^3}{h^3}} = i\frac{h^3-h_0{}^3}{h^3-h_c{}^3}$$

Manning型

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\frac{1-\left(\dfrac{h_0}{h}\right)^{\frac{10}{3}}}{1-\dfrac{h_c{}^2}{h^3}} = i\frac{h^3-h_0{}^{\frac{10}{3}}h^{-\frac{1}{3}}}{h^3-h_c{}^3}$$

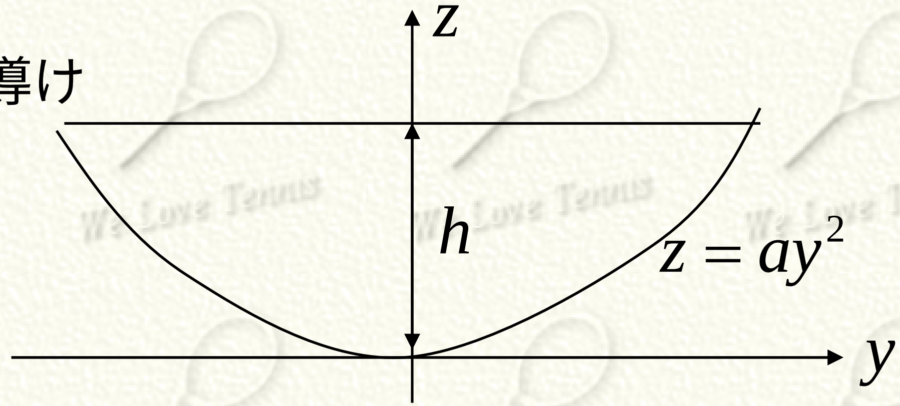
問題１

台形断面の水面形方程式を導け



問題２

放物線形断面の水面形方程式を導け



【3】限界勾配（$h_0 = h_c$ となる勾配）

$h_0 = h_c$ となる条件を求める。

Chezy式では、

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{\cancel{q^2}}{C^2 i}} = \sqrt[3]{\frac{\cancel{q^2}}{g}} = h_c \longrightarrow i_c = \frac{g}{C^2}$$

Manning式では、

$$h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}} = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} = h_c \longrightarrow i_c = \frac{n^2 g^{\frac{10}{9}}}{q^{\frac{2}{9}}}$$

$$\left(\frac{n^2 q^2}{i}\right) = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{10}{9}} = \frac{q^{\frac{20}{9}}}{g^{\frac{10}{9}}}$$

① $i < i_c$ のとき

$$h_0{}^3 = \frac{q^2}{C^2 i} = \frac{q^2}{g}\frac{g}{C^2 i} = h_c{}^3 \cdot \frac{i_c}{i} \qquad \therefore \frac{h_0}{h_c} = \left(\frac{i_c}{i}\right)^{\frac{1}{3}} > 1$$

従って $i < i_c$ に対しては常流の等流水深が生じる。これを

$\boxed{\text{緩勾配水路(Mild Slope Channel)}}$という。 $\boxed{i < i_c}$ $\boxed{h_0 > h_c}$

② $i > i_c$ のとき

$$h_0{}^3 = \frac{q^2}{C^2 i} = \frac{q^2}{g}\frac{g}{C^2 i} = h_c{}^3 \cdot \frac{i_c}{i} \qquad \therefore \frac{h_0}{h_c} = \left(\frac{i_c}{i}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$$

従って $i > i_c$ に対しては射流の等流水深が生じる。これを

$\boxed{\text{急勾配水路(Steep Slope Channel)}}$という。 $\boxed{i > i_c}$ $\boxed{h_0 < h_c}$

【4】緩勾配水路における水面形

$i < i_c$　したがって　$h_0 > h_c$

$h > h_0 > h_c$　常流

$h_0 > h > h_c$　常流

$h_0 > h_c > h$　射流

① $h > h_0 > h_c$ の場合

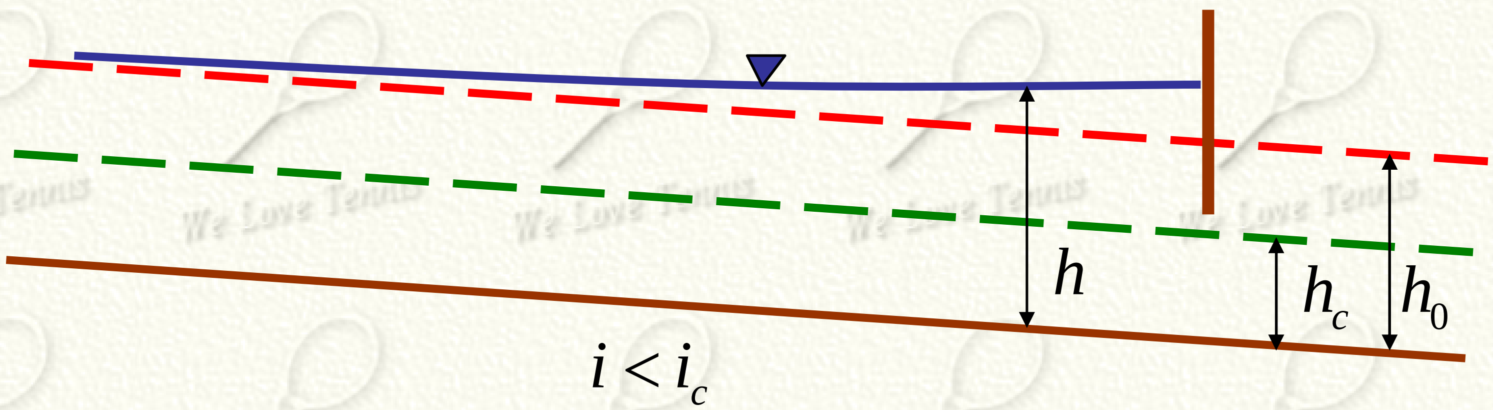
$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\frac{h^3 - h_0{}^3 > 0}{h^3 - h_c{}^3 > 0} \longrightarrow > 0$$

x とともに水深が増す

$h > h_c$ で常流なので下流の状態が上流に伝播する

上流に向かうほど $h \to h_0$ すなわち、$\dfrac{\partial h}{\partial x} \to 0$ ➡ 下流で境界条件上流に向かって計算

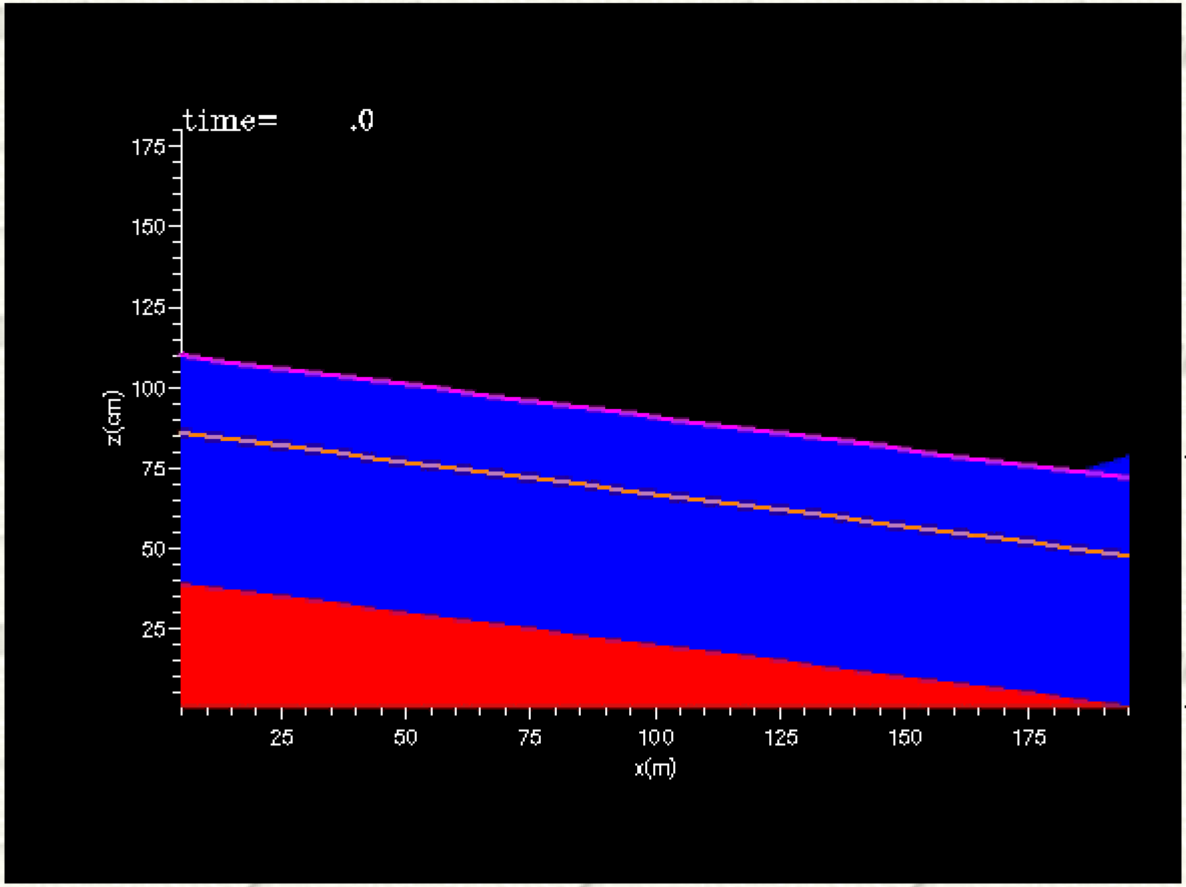
M$_1$曲線、堰上げ背水(Back Water)という。



$$i = 1/500, \quad q = 1.0 \ (\mathrm{m^2/s})$$
$$n = 0.025$$

$$h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}} = 70.54\mathrm{cm}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 46.7\mathrm{cm}$$



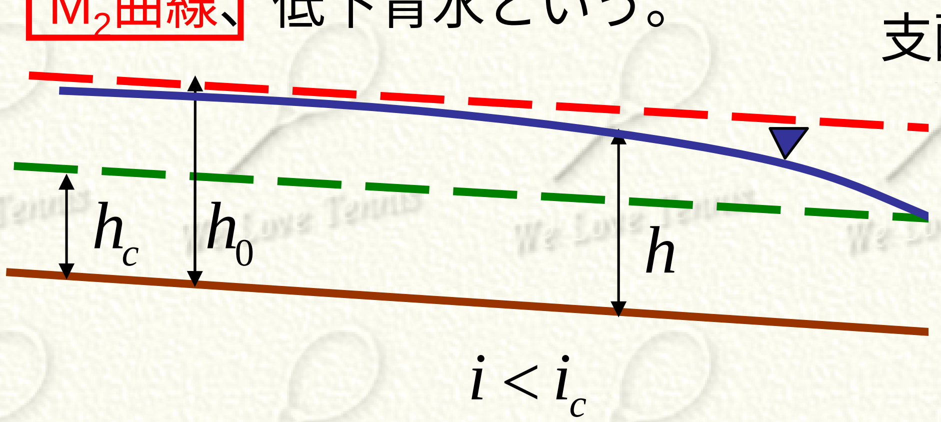
$$h_{\text{downstram}} = 84.6 \ (\mathrm{cm})$$

② $h_0 > h > h_c$ の場合

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\frac{h^3 - h_0^{\ 3}}{h^3 - h_c^{\ 3}} \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix} \longrightarrow < 0$$

- $h > h_c$ ゆえに常流
- x とともに水深減少
- 上流に向かうほど $h \to h_0$ すなわち $\dfrac{\partial h}{\partial x} \to 0$
- 下流に向かうほど $h \to h_c$ すなわち $\dfrac{\partial h}{\partial x} \to \infty$ または $\dfrac{\partial h}{\partial x} \to \dfrac{0}{0}$

M$_2$曲線、低下背水という。

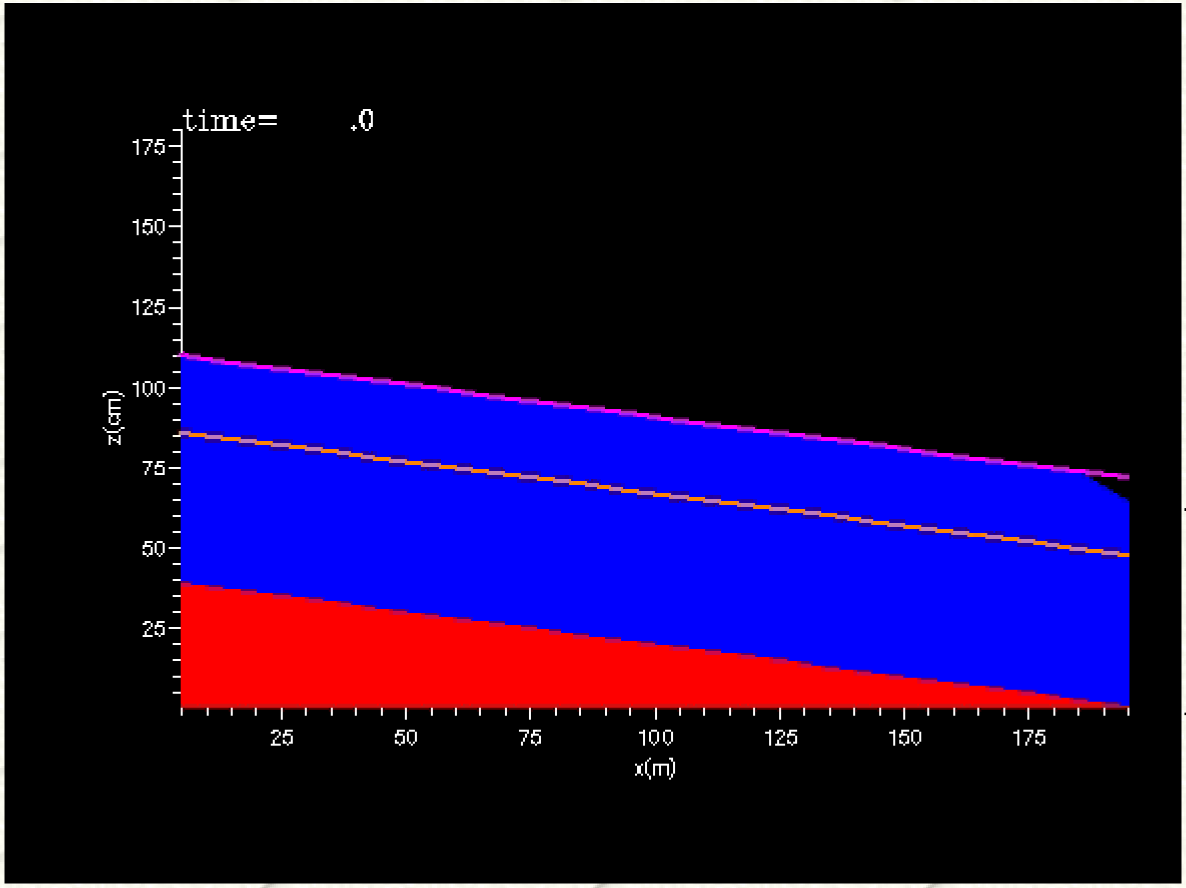


$$i = 1/500, \quad q = 1.0\ (\mathrm{m^3/s})$$

$$n = 0.025$$

$$h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}} = 70.54\mathrm{cm}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 46.7\mathrm{cm}$$



$$h_{\mathrm{downstram}} = 56.4\ (\mathrm{cm})$$

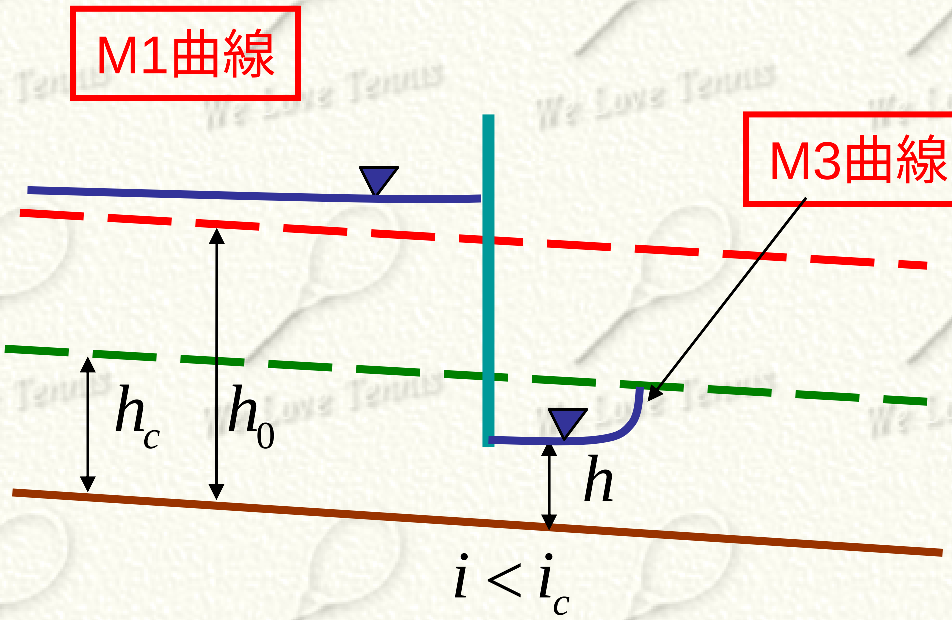
③ $h_0 > h_c > h$ の場合

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\,\frac{h^3 - h_0^{\,3} < 0}{h^3 - h_c^{\,3} < 0} \longrightarrow > 0$$

- x とともに水深増加

- $h < h_c$ ゆえに射流、上流の状態が下流に伝播
- 下流に向かうほど $h \to h_c$ すなわち $\dfrac{\partial h}{\partial x} \to \infty$

上流の境界から計算を進める



【5】急勾配水路における水面形

$i > i_c$ 　したがって $h_c > h_0$

- $h > h_c > h_0$ 　常流
- $h_c > h > h_0$ 　射流
- $h_c > h_0 > h$ 　射流

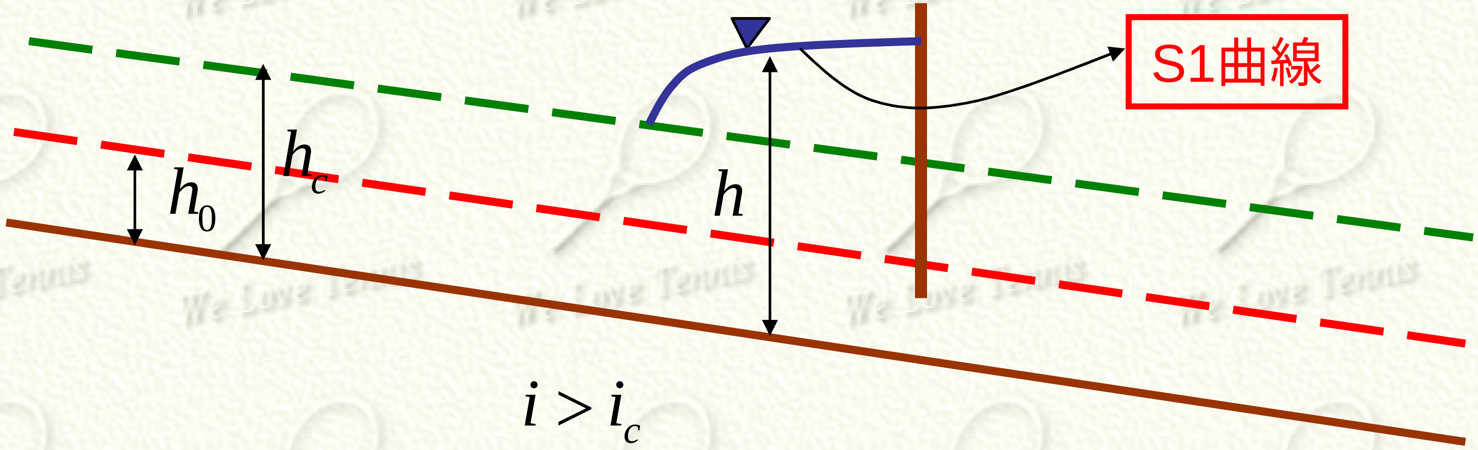
④ $h > h_c > h_0$ の場合

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\,\frac{h^3 - h_0{}^3 > 0}{h^3 - h_c{}^3 > 0} \longrightarrow > 0$$

x とともに水深が増す

$h > h_c$ で常流なので下流の状態が上流に伝播する ⟶ 下流で境界条件、上流に向かって計算

上流に向かうほど $h \to h_c$ すなわち、$\dfrac{\partial h}{\partial x} \to \infty$



⑤ $h_c > h > h_0$ の場合

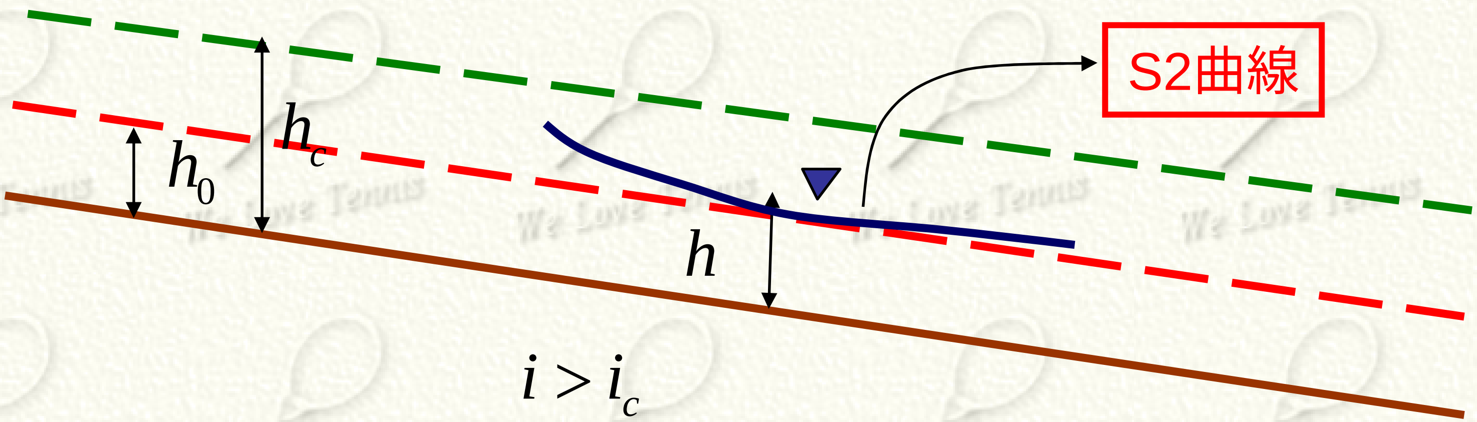
$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\frac{h^3 - h_0^3 > 0}{h^3 - h_c^3 < 0} \longrightarrow < 0$$

x とともに水深が減少する

$h < h_c$ で射流なので上流の状態が下流に伝播する ➡ 上流で境界条件、下流に向かって計算

下流に向かうほど $h \to h_0$ すなわち、$\frac{\partial h}{\partial x} \to 0$

上流に向かうほど $h \to h_c$ すなわち $\frac{\partial h}{\partial x} \to \infty$ または $\frac{\partial h}{\partial x} \to \frac{0}{0}$



$i = 1/50, \quad q = 1.0\ (\mathrm{m^3/s})$

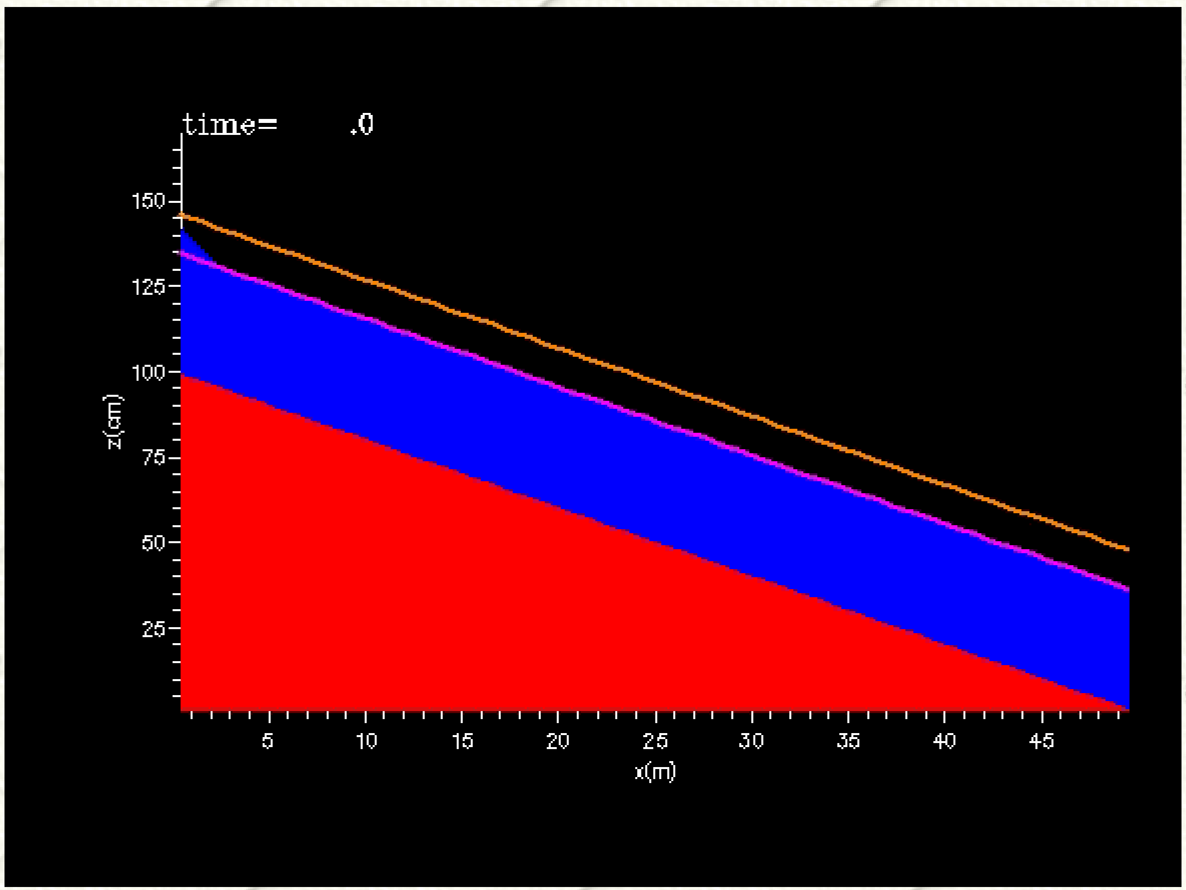
$n = 0.025$

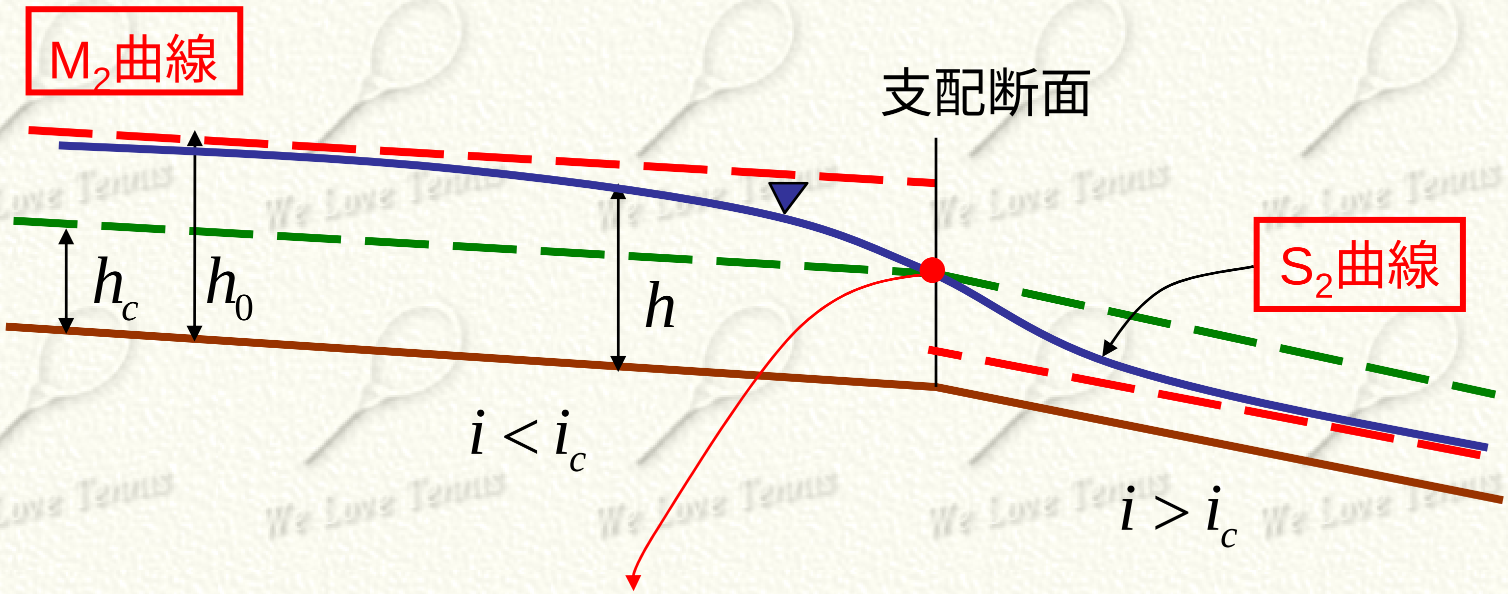
$$h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}} = 35.4\mathrm{cm}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 46.7\mathrm{cm}$$

h_{upstream}

$= 42.4\ (\mathrm{cm})$





ここで、

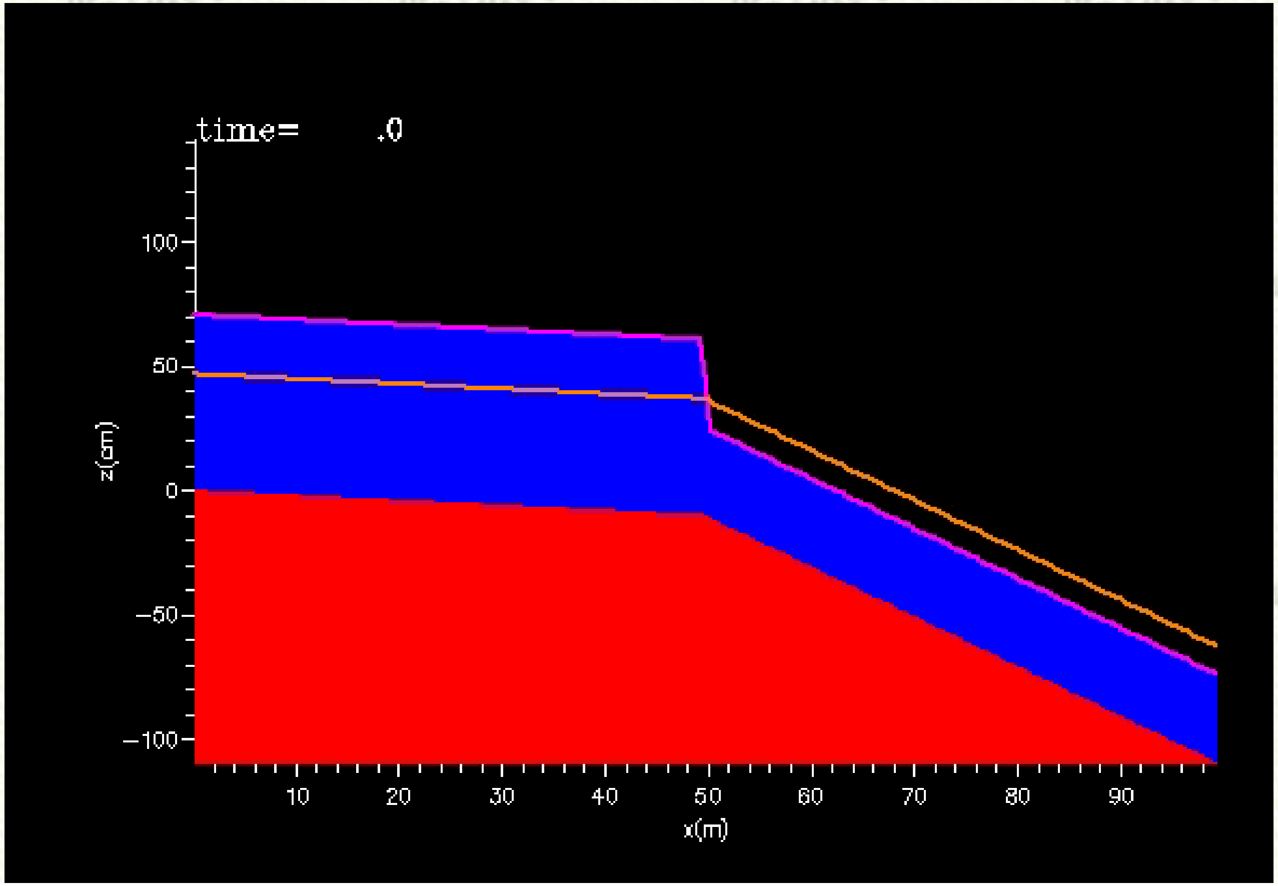
$h = h_0 = h_c$ よって $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{0}{0}$ 遷移流

上流側$i = 1/500$,　下流側$i = 1/50$,

$q = 1.0$ (m^3 /s)、$n = 0.025$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 46.7\text{cm}$$

上流側$h_0 = \left(\frac{n^2q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}} = 70.54$cm、　下流側$h_0 = \left(\frac{n^2q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}} = 35.4$cm

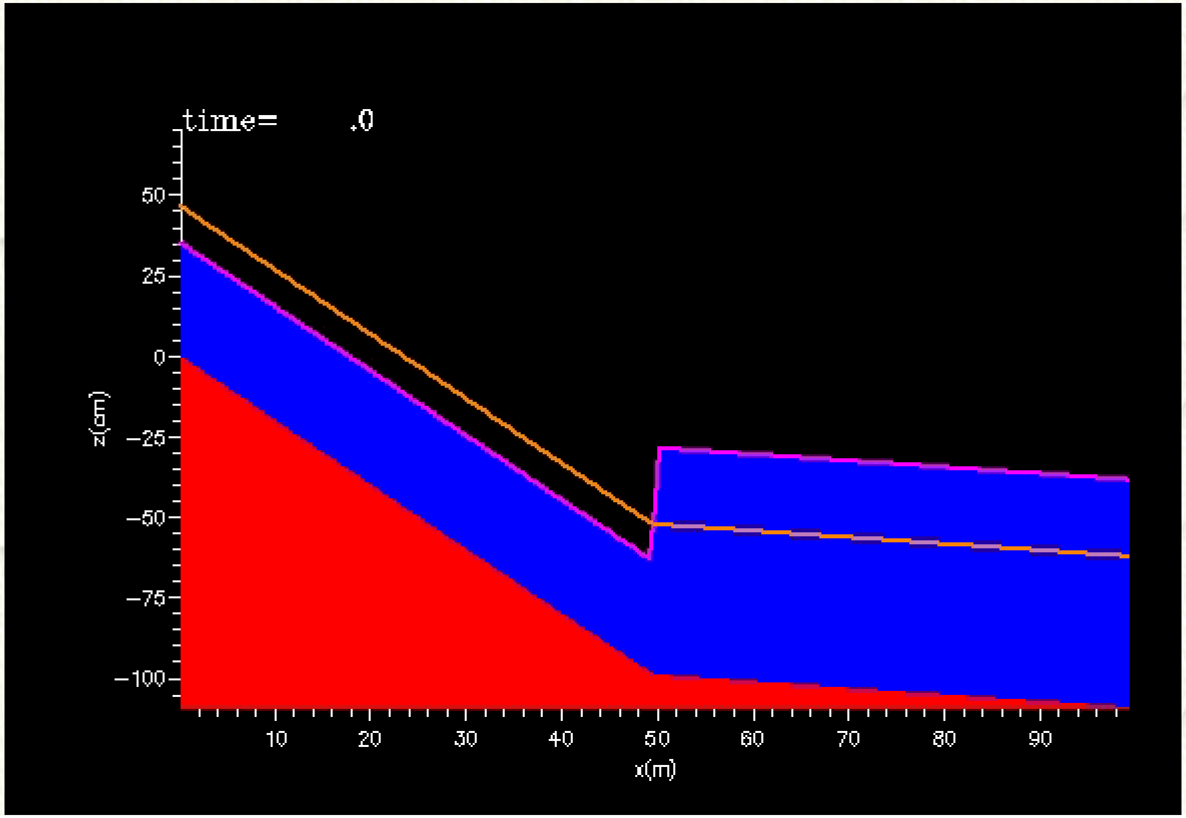


下流側$i = 1/500$,　上流側$i = 1/50$,

$q = 1.0$ (m^3 / s)、$n = 0.025$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 46.7\text{cm}$$

下流側$h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}} = 70.54$cm、　上流側$h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}} = 35.4$cm



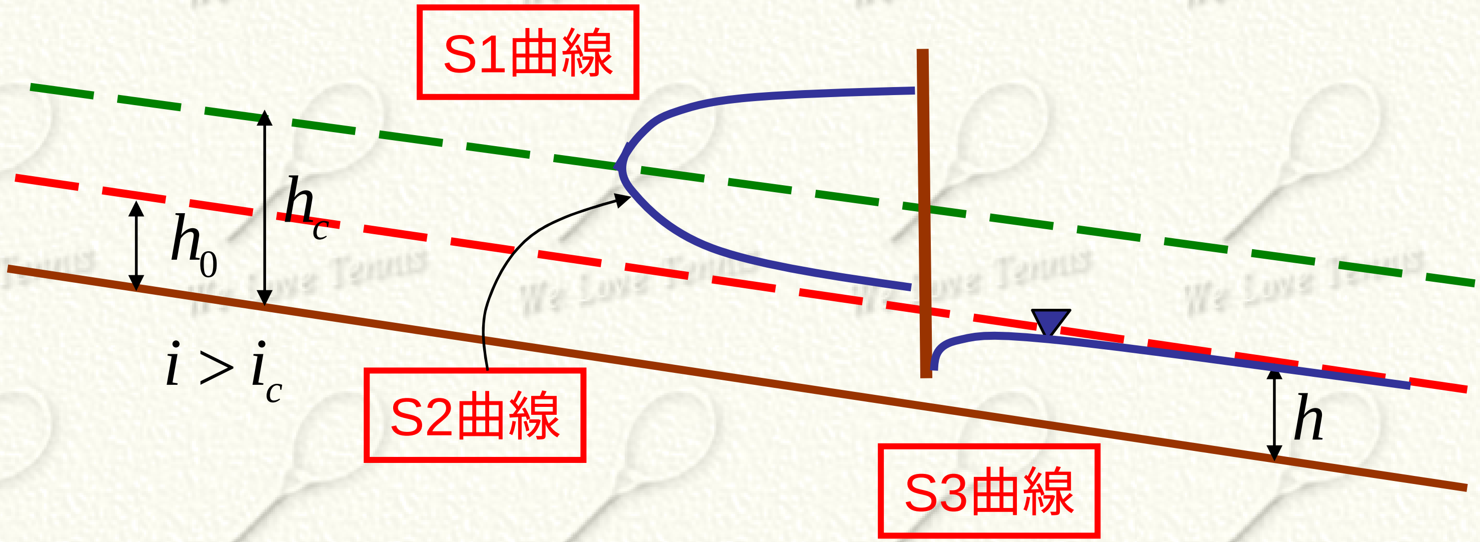
⑥ $h_c > h_0 > h$ の場合

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\,\frac{h^3 - h_0^{\;3} < 0}{h^3 - h_c^{\;3} < 0} \longrightarrow > 0$$

x とともに水深が増大する

$h < h_c$ で射流なので上流の状態が下流に伝播する ➡ 上流で境界条件、下流に向かって計算

下流に向かうほど $h \to h_0$ すなわち、$\dfrac{\partial h}{\partial x} \to 0$



$$h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i} \right)^{\frac{3}{10}} = 35.4\text{cm}$$

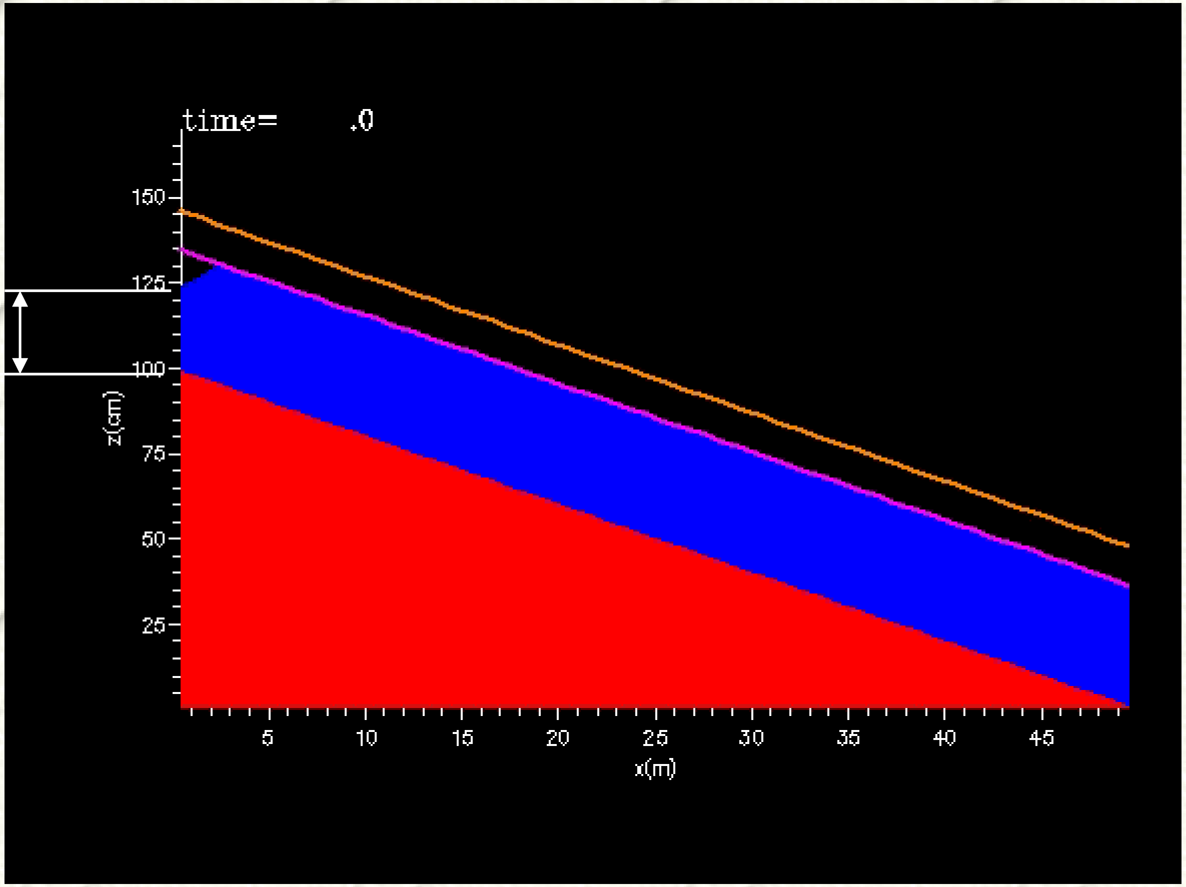
$$i = 1/50, \quad q = 1.0\ (\text{m}^3/\text{s})$$

$$n = 0.025$$

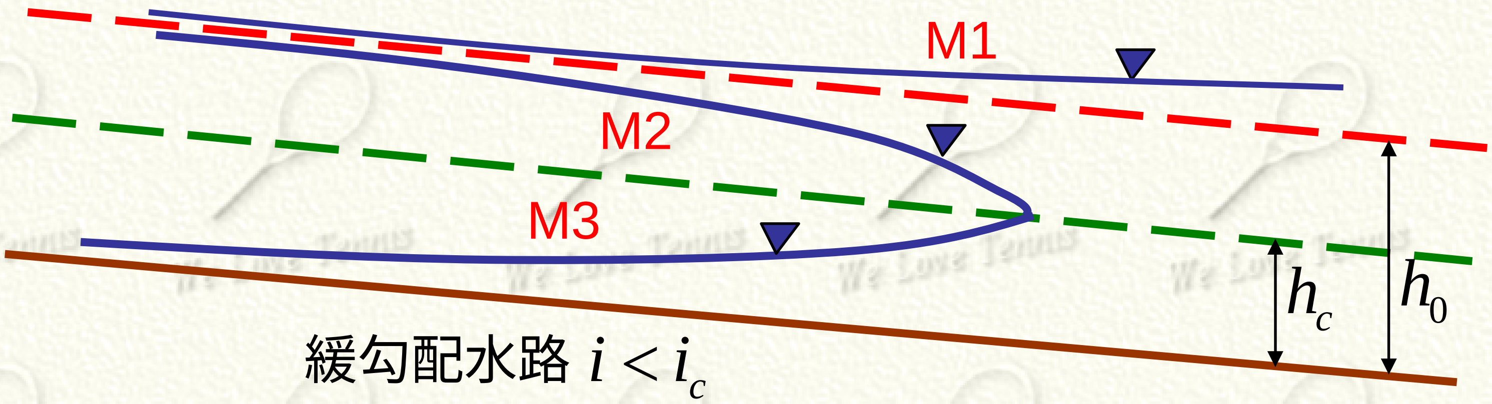
$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 46.7\text{cm}$$

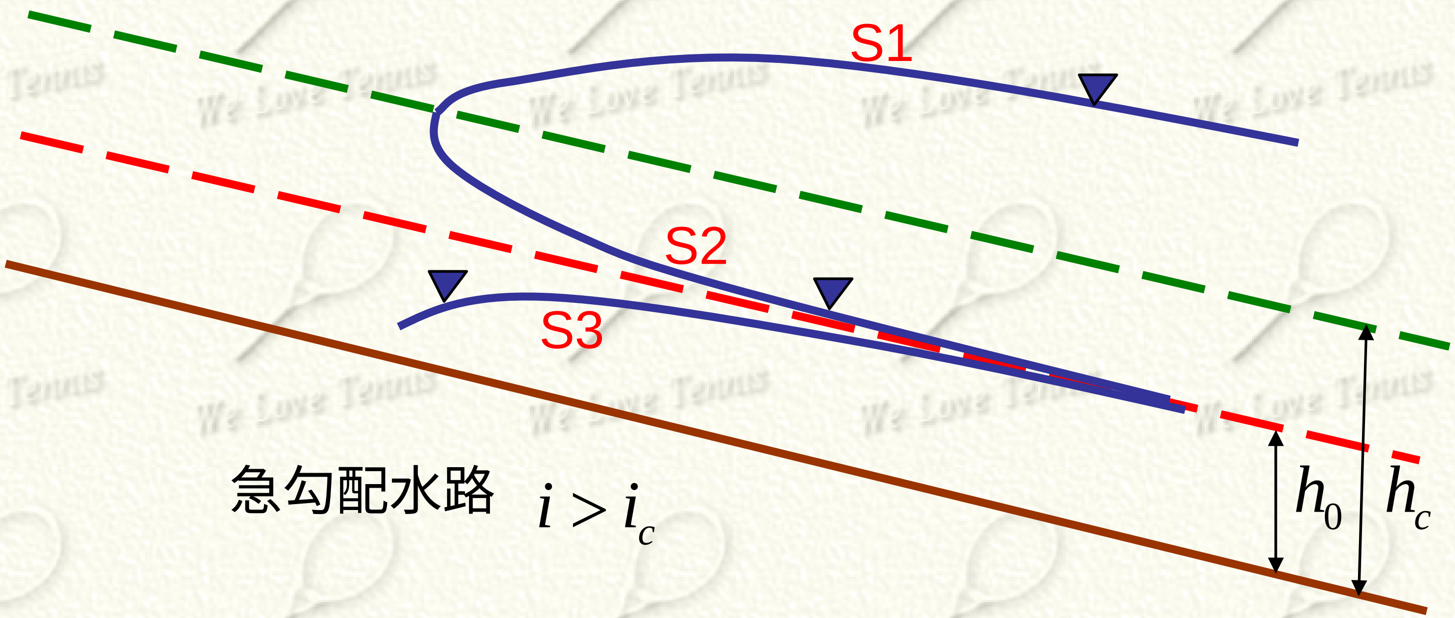
$$h_{\text{upstream}}$$

$$= 24.8\ (\text{cm})$$



⑦ まとめ





【6】限界勾配水路における水面形

Critical Slope Channel $i = i_c \rightarrow h_0 = h_c$ → $h > h_0 = h_c$, $h_0 = h_c > h$

⑧ $h > h_0 = h_c$ の場合

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\frac{h^3 - h_0^3}{h^3 - h_c^3} = i\frac{\cancel{h^3 - h_c^3}}{\cancel{h^3 - h_c^3}} = i = i_c > 0$$

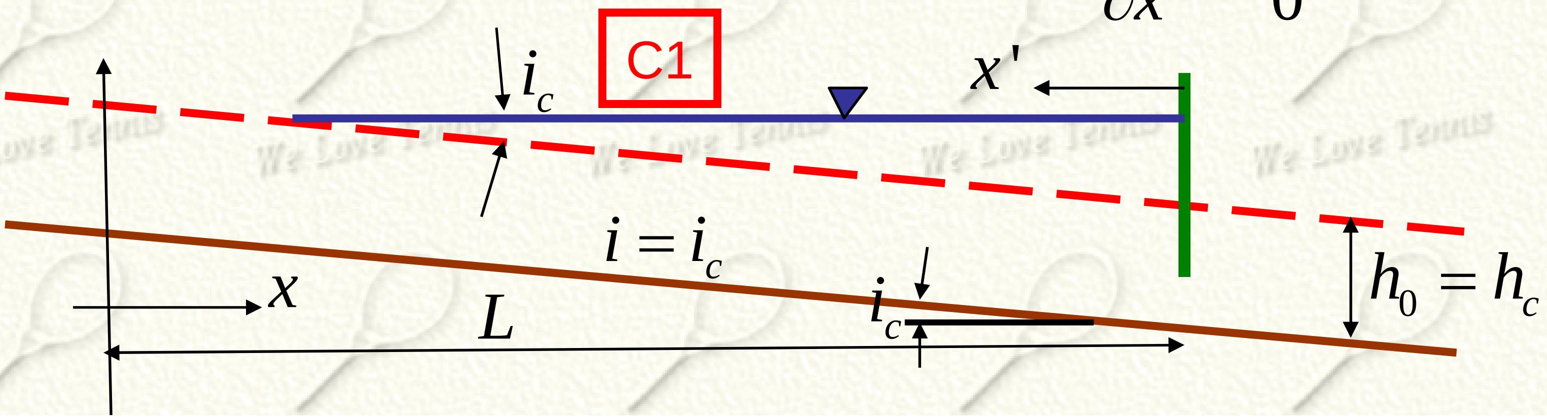
$h > h_c$ で常流なので下流の状態が上流に伝播する

x とともに水深が増大する

- $\dfrac{\partial h}{\partial x} = i_c \quad \rightarrow \quad h = i_c x + C$
- $x = L$ で $h = H$ ならば $H = i_c L + C \quad \therefore C = H - i_c L \quad \therefore h = i_c(x - L) + H$

$L - x = x'$ と置き換えれば、$h = H - i_c x'$

- 上流に向かうと $h \rightarrow h_0 = h_c$ したがって、$\dfrac{\partial h}{\partial x} \rightarrow \dfrac{0}{0}$



⑨ $h < h_0 = h_c$ の場合

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i\frac{h^3 - h_0{}^3}{h^3 - h_c{}^3} = i\cancel{\frac{h^3 - h_c{}^3}{h^3 - h_c{}^3}} = i = i_c > 0$$

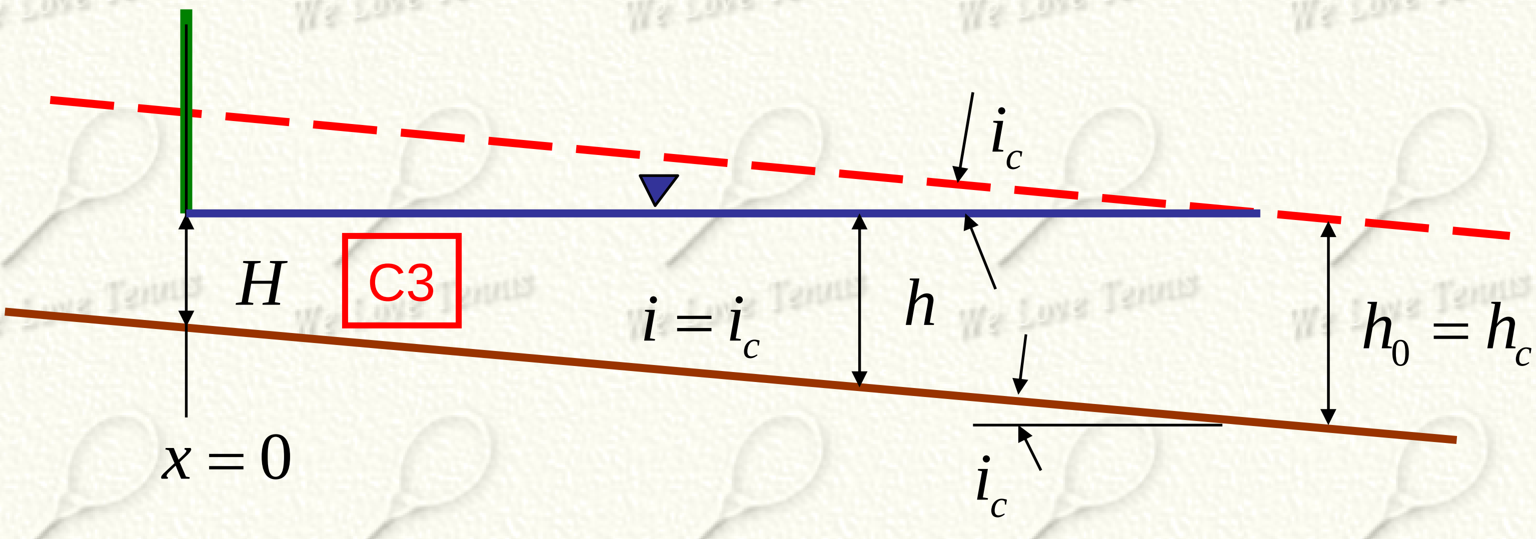
$h < h_c$ で射流なので
上流の状態が
下流に伝播する

- $$\frac{\partial h}{\partial x} = i_c \quad \rightarrow \quad h = i_c x + C$$

x とともに水深が増大する

$x = 0$ で $h = H$ ならば $H = C \quad \therefore h = i_c x + H$

- 下流に向かうと $h \rightarrow h_0 = h_c$ したがって、$\dfrac{\partial h}{\partial x} \rightarrow \dfrac{0}{0}$



【7】水平勾配水路における水面形 $\boxed{i=0}$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{i+\dfrac{Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial B}\dfrac{\partial B}{\partial x}-\dfrac{Q^2}{C^2A^2R}}{1-\dfrac{Q^2}{gA^3}\dfrac{\partial A}{\partial h}}=\frac{i-\dfrac{Q^2}{C^2B^2h^3}}{1-\dfrac{Q^2}{gB^2h^3}}=\frac{\cancel{i}h^3-\dfrac{Q^2}{C^2B^2}}{h^3-h_c{}^3}=\frac{-\dfrac{Q^2}{C^2B^2}}{h^3-h_c{}^3}$$

$$(h^3-h_c{}^3)dh=-\frac{q^2}{C^2}dx \qquad \int(h^3-h_c{}^3)dh=\int-\frac{q^2}{C^2}dx$$

$$\frac{1}{4}h^4-h_c{}^3h=-\left(\frac{q}{C}\right)^2x+K \qquad x=0にてh=H\rightarrow K=\frac{1}{4}H^4-h_c{}^3H$$

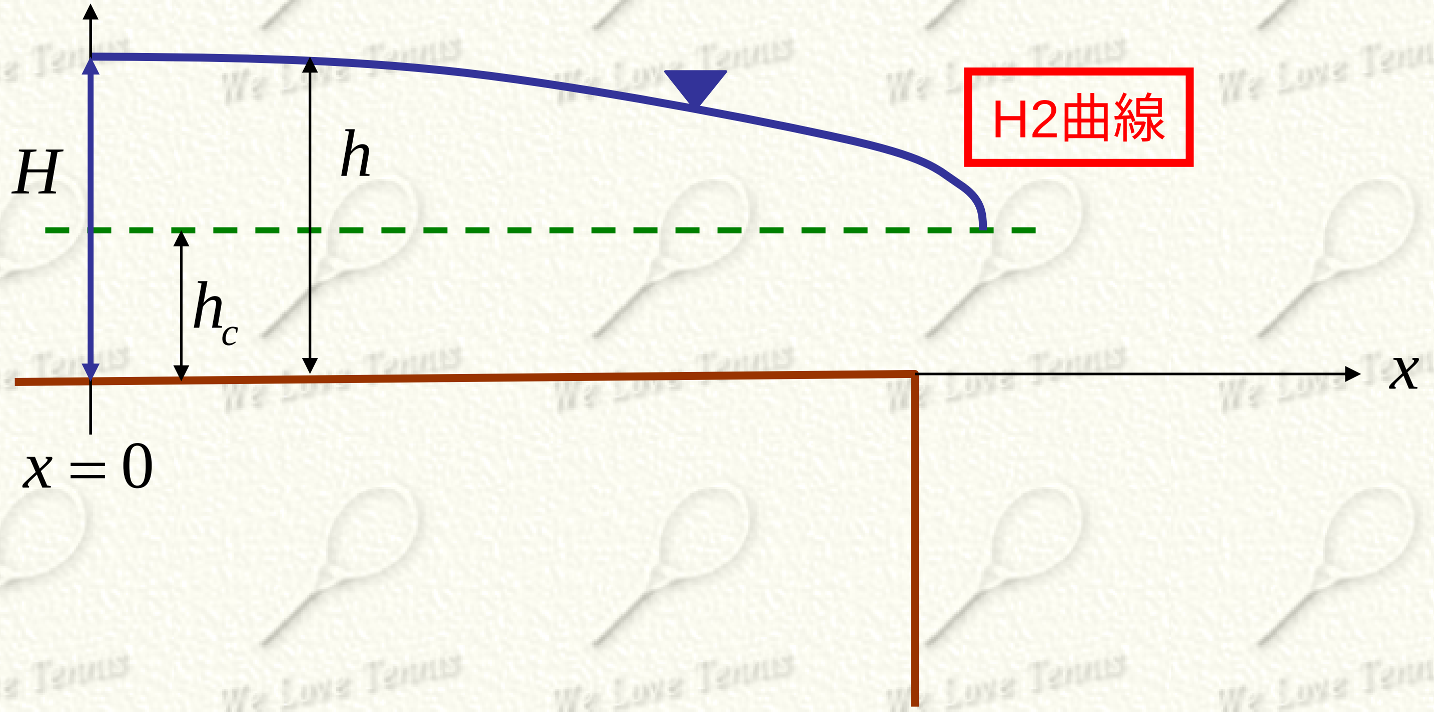
$$\boxed{\therefore\left(\frac{q}{C}\right)^2x=\frac{1}{4}(H^4-h^4)-h_c{}^3(H-h) \quad (4次曲線)}$$

水平勾配水路における漸変流の水面形

⑩ $h > h_c$ 常流のとき

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-\dfrac{Q^2}{C^2B^2} < 0}{h^3 - h_c^3 > 0} \longrightarrow < 0$$

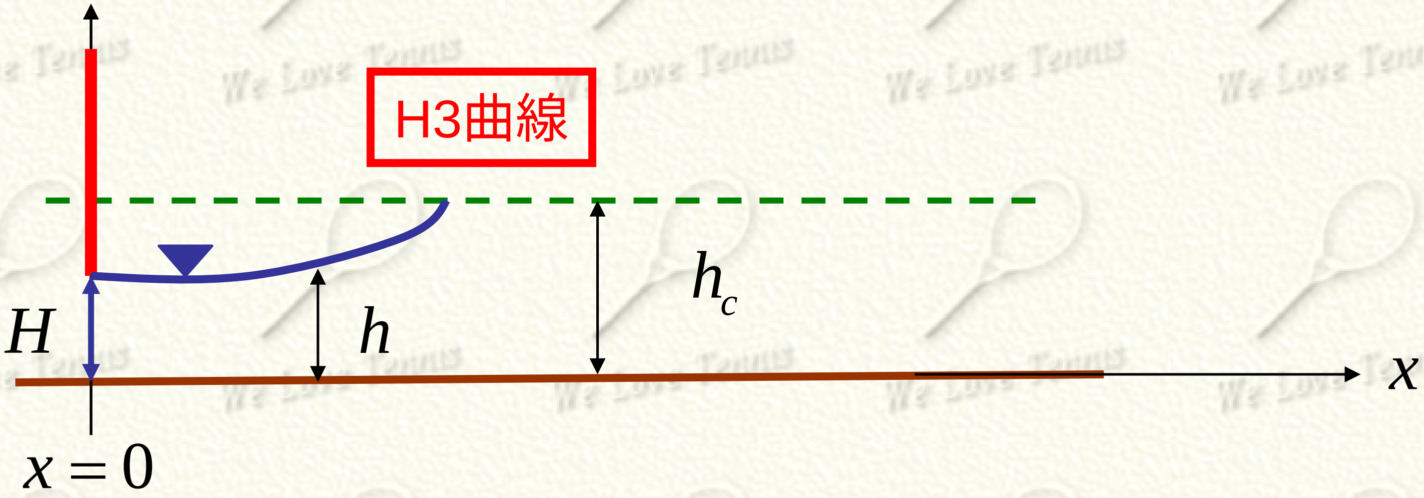
$$\boxed{\therefore \left(\frac{q}{C}\right)^2 x = \frac{1}{4}(H^4 - h^4) - h_c^3(H - h)}$$



⑪ $h < h_c$ 射流のとき

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\overbrace{-\dfrac{Q^2}{C^2B^2}}^{<0}}{\underbrace{h^3 - h_c^{\,3}}_{<0}} \longrightarrow > 0$$

$$\boxed{\therefore \left(\frac{q}{C}\right)^2 x = \frac{1}{4}(H^4 - h^4) - h_c^{\,3}(H - h)}$$



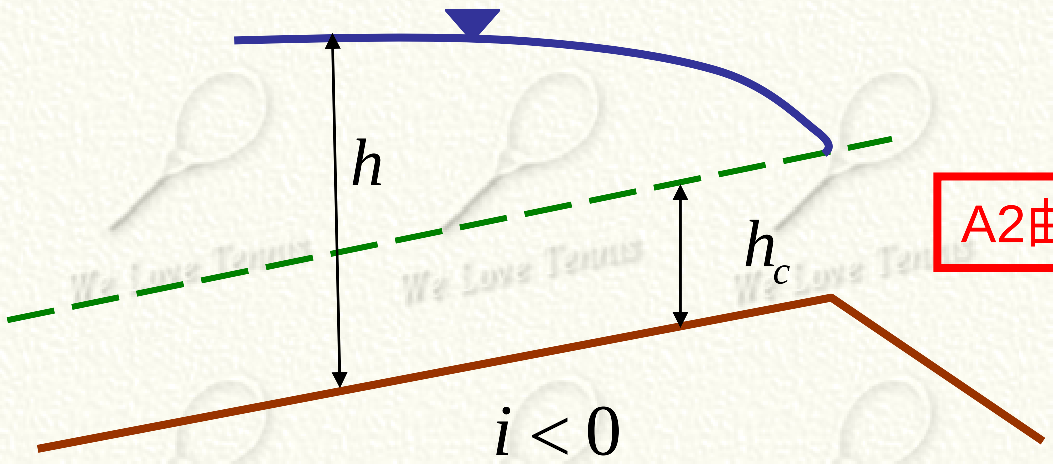
【８】逆勾配水路における水面形 $\boxed{i<0}$

⑫ $h>h_c$ 常流のとき

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\overset{<0}{ih^3}-\dfrac{Q^2}{C^2B^2}}{h^3-h_c^3}\quad \begin{matrix}<0\\ \\ >0\end{matrix} \longrightarrow <0$$

■下流に向かうと $h\rightarrow h_c$

とともに、$\dfrac{\partial h}{\partial x}\rightarrow -\infty$



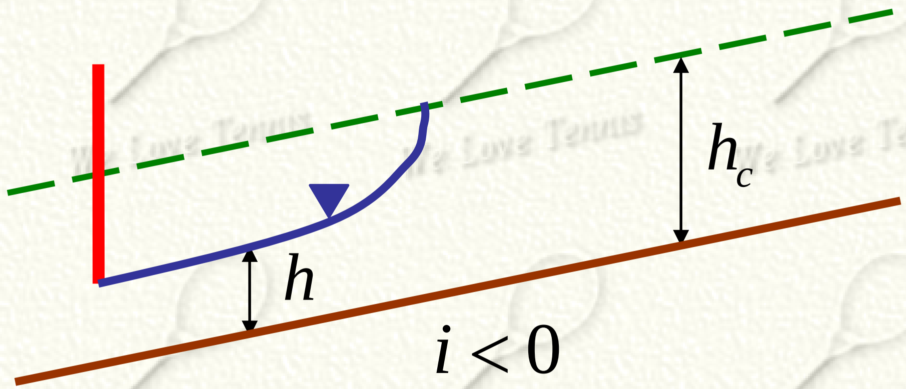
A2曲線

⑬ $h < h_c$ 射流のとき

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\overset{<0}{ih^3} - \dfrac{Q^2}{C^2B^2}}{h^3 - h_c^{\,3}} \quad \begin{matrix} <0 \\ <0 \end{matrix} \longrightarrow\ >0$$

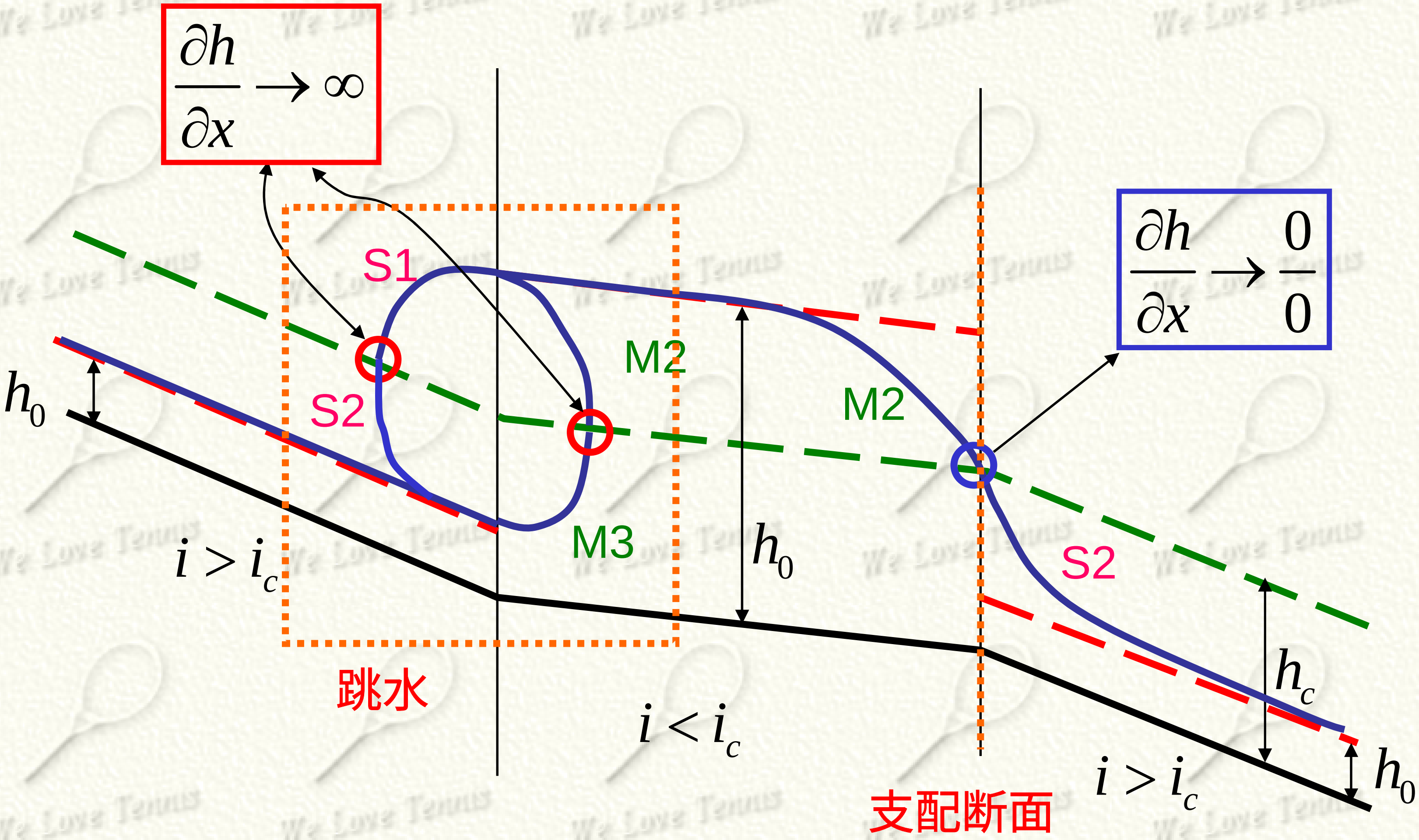
下流に向かうと $h \to h_c$

とともに、 $\dfrac{\partial h}{\partial x} \to \infty$



A3曲線

【問題】下図のような勾配を持つ長方形断面水路における流れの水面形の概形を描け



４－４ 水面形方程式の解法（不等流計算）

Text(下)p29～

【1】差分による数値計算

実際に水面形を求めるためには、

Chezy型

$$\frac{\partial h}{\partial x}=i\frac{1-\frac{{h_0}^3}{h^3}}{1-\frac{{h_c}^3}{h^3}}$$

Manning型

$$\frac{\partial h}{\partial x}=i\frac{1-\left(\frac{h_0}{h}\right)^{\frac{10}{3}}}{1-\frac{{h_c}^2}{h^3}}$$

これらの式を積分して h の分布形を求める必要があるが、一般的には難しい。

そこで、 h を離散値として扱い数値的に積分する。

以下、Manning型を例に説明する。

開水路のベルヌイの式に戻って

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{n^2v^2}{R^{\frac{4}{3}}}=0$$

広長方形断面の場合　　$Q=Av,\quad A=Bh,\quad R\approx h$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2gB^2h^2}\right)+\frac{n^2Q^2}{B^2h^{\frac{10}{3}}}=0$$

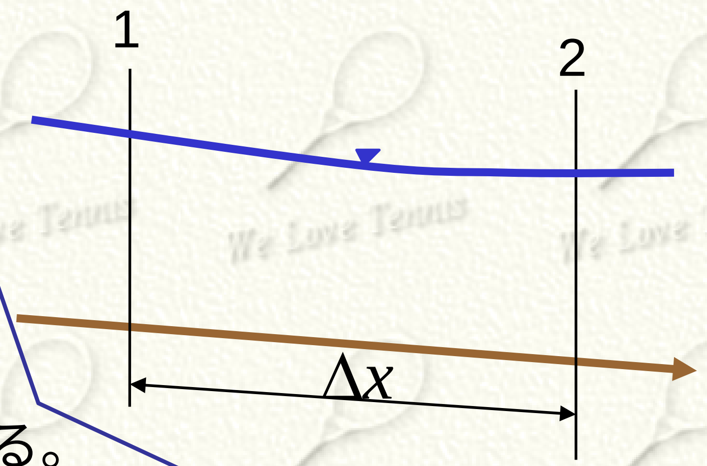
既知

未知

一般的に z, B, n, g, Q は計算条件として与えられる。

したがって、未知数は h のみ。

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left[z+h+\frac{Q^2}{2gB^2h^2}\right]}+\boxed{\frac{n^2Q^2}{B^2h^{\frac{10}{3}}}}=0$$



すべての変数を図中の1, 2の断面で定義する。

$$\left[\left(z+h+\frac{Q^2}{2gB^2h^2}\right)_2-\left(z+h+\frac{Q^2}{2gB^2h^2}\right)_1\right]\frac{1}{\Delta x}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n^2Q^2}{B^2h^{\frac{10}{3}}}\right)_1+\left(\frac{n^2Q^2}{B^2h^{\frac{10}{3}}}\right)_2\right]=0$$

$$\left[\left(z+h+\frac{Q^2}{2gB^2h^2}\right)_2-\left(z+h+\frac{Q^2}{2gB^2h^2}\right)_1\right]\frac{1}{\Delta x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n^2Q^2}{B^2h^{\frac{10}{3}}}\right)_1+\left(\frac{n^2Q^2}{B^2h^{\frac{10}{3}}}\right)_2\right]=0$$

$$\left(z_2+h_2+\frac{Q^2}{2gB_2{}^2h_2{}^2}-z_1-h_1-\frac{Q^2}{2gB_1{}^2h_1{}^2}\right)\frac{1}{\Delta x}+\frac{n^2Q^2}{2}\left[\frac{1}{B_1{}^2h_1{}^{\frac{10}{3}}}+\frac{1}{B_2{}^2h_2{}^{\frac{10}{3}}}\right]=0$$

$$\left(z_2+h_2+\frac{Q^2}{2gB_2{}^2h_2{}^2}-z_1-h_1-\frac{Q^2}{2gB_1{}^2h_1{}^2}\right)+\frac{n^2Q^2\Delta x}{2}\left[\frac{1}{B_1{}^2h_1{}^{\frac{10}{3}}}+\frac{1}{B_2{}^2h_2{}^{\frac{10}{3}}}\right]=0$$

h_1, h_2 以外は既知量or計算条件として与えられる量

常流の場合、下流→上流へ影響が伝わる　h_2 を与えて h_1 を求める

射流の場合、上流→下流へ影響が伝わる　h_1 を与えて h_2 を求める

常流の場合　下流の情報が上流に伝わる。　$h_2 \rightarrow h_1$

$$\left(z_2 + h_2 + \frac{Q^2}{2gB_2{}^2 h_2{}^2} - z_1 - h_1 - \frac{Q^2}{2gB_1{}^2 h_1{}^2} \right) + \frac{n^2 Q^2 \Delta x}{2} \left[\frac{1}{B_1{}^2 h_1{}^{\frac{10}{3}}} + \frac{1}{B_2{}^2 h_2{}^{\frac{10}{3}}} \right] = 0$$

$$f(h_1) = h_1 + \frac{Q^2}{2gB_1{}^2 h_1{}^2} - \frac{n^2 Q^2 \Delta x}{2B_1{}^2 h_1{}^{\frac{10}{3}}} - z_2 - h_2 - \frac{Q^2}{2gB_2{}^2 h_2{}^2} + z_1 - \frac{n^2 Q^2 \Delta x}{2B_2{}^2 h_2{}^{\frac{10}{3}}} = 0$$

未知数は $h_1 \longrightarrow h_1 = X$ とする。

$$\boxed{f(X) = X + \alpha X^{-2} + \beta X^{-\frac{10}{3}} + \gamma}$$

$f(X) = 0$ を満たす X を求める。

ただし、

$$\alpha = \frac{Q^2}{2gB_1{}^2}, \quad \beta = -\frac{n^2 Q^2 \Delta x}{2B_1{}^2}$$

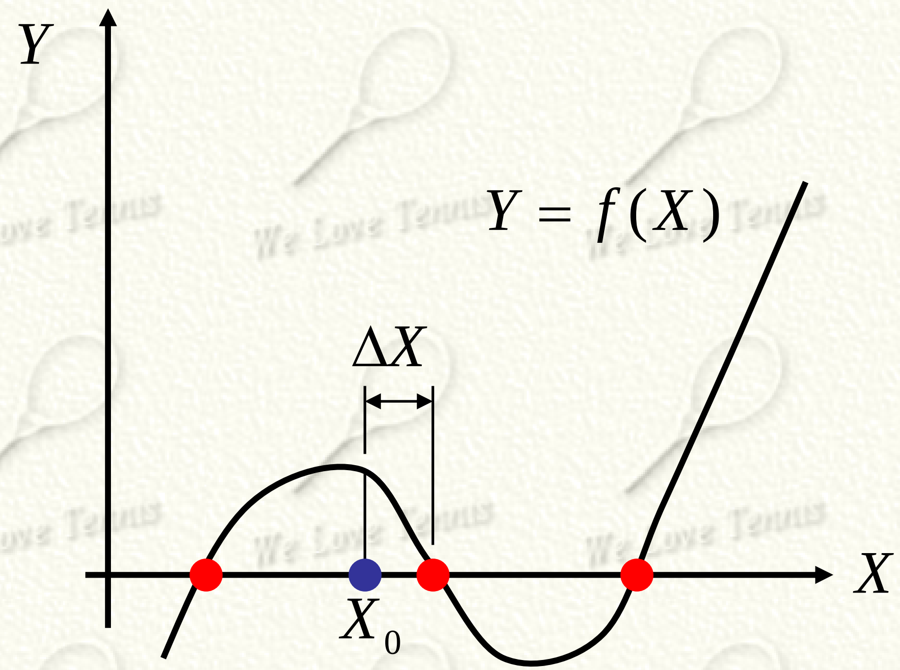
$$\gamma = -z_2 + z_1 - h_2 - \frac{Q^2}{2gB_2{}^2 h_2{}^2} - \frac{n^2 Q^2 \Delta x}{2B_2{}^2 h_2{}^{\frac{10}{3}}}$$

一般に $Y = f(X) = 0$ を満たす、X を求める方法？

そんなの
あるはず無い！

解の個数もいくつあるか
分からない。

ただし、$X = X_0$ に最も近い
解は？ → Newton 法による



$$f(X_0) + f'(X_0)\Delta X \approx 0$$

$$f(X_0) \neq 0$$

$$f(X_0 + \Delta X) = 0$$

補正量

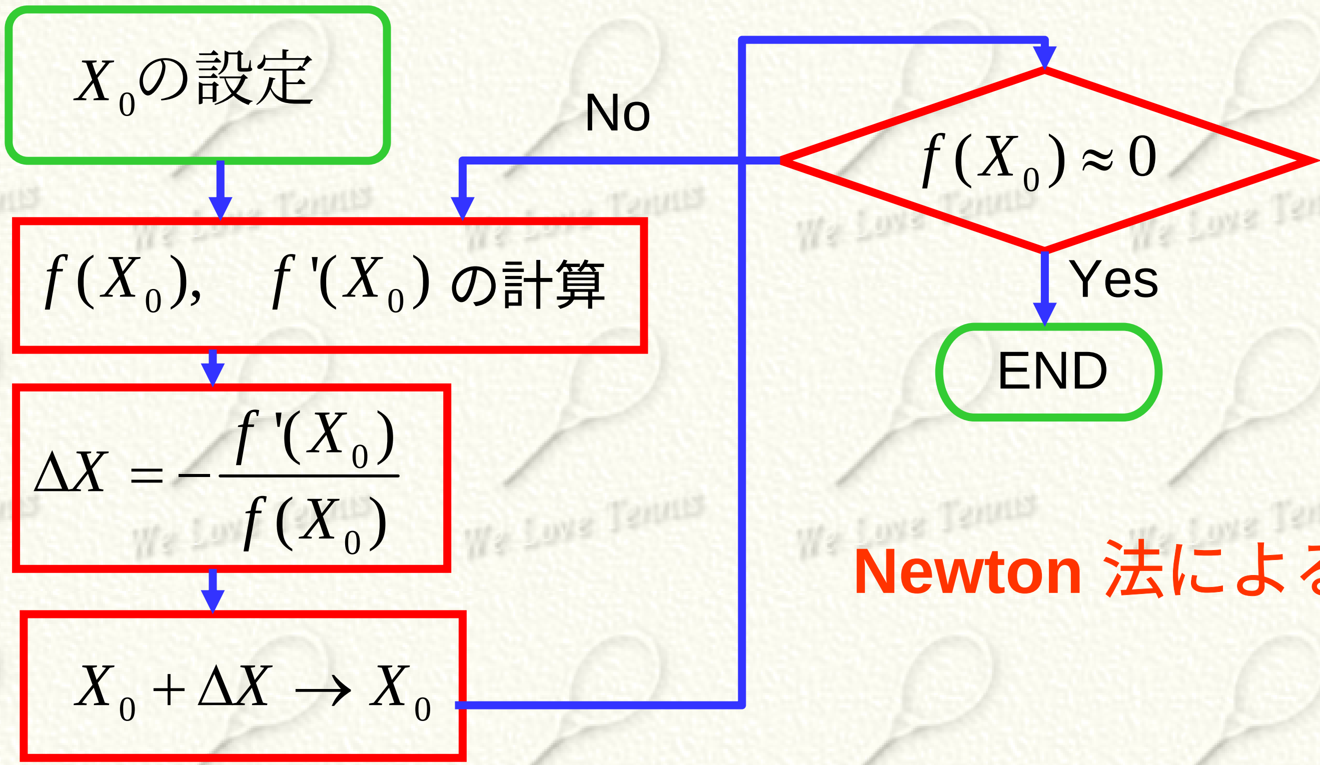
$$\boxed{\Delta X = -\frac{f'(X_0)}{f(X_0)}}$$

$$\boxed{f(X_0) + f'(X_0)\Delta X} + \frac{1}{2!} f''(X)\Delta X^2 + \cdots = 0$$

$$\Delta X = -\frac{f'(X_0)}{f(X_0)}$$

$$f(X) = X + \alpha X^{-2} + \beta X^{-\frac{10}{3}} + \gamma \rightarrow f(X_0) = X_0 + \alpha X_0^{-2} + \beta X_0^{-\frac{10}{3}} + \gamma$$

$$f'(X) = 1 - 2\alpha X^{-3} - \frac{10}{3}\beta X^{-\frac{13}{3}} \rightarrow f'(X_0) = 1 - 2\alpha X_0^{-3} - \frac{10}{3}\beta X_0^{-\frac{13}{3}}$$



Newton 法による数値計算

例題　不等流計算

Manningの粗度係数n=0.02, 河床勾配 i=1/1000, 川幅 B=10(m)の広長方形断面の水路に流量Q=20(m^3/s)が流下している。

(1) 限界勾配を求めよ。

$$i_c = \frac{n^2 g^{\frac{10}{9}}}{q^{\frac{2}{9}}} = \frac{0.02^2 \times 9.8^{\frac{10}{9}}}{\left(\frac{20}{10}\right)^{\frac{2}{9}}} = 0.00433$$

(2) この水路は緩勾配水路か、急勾配水路か。

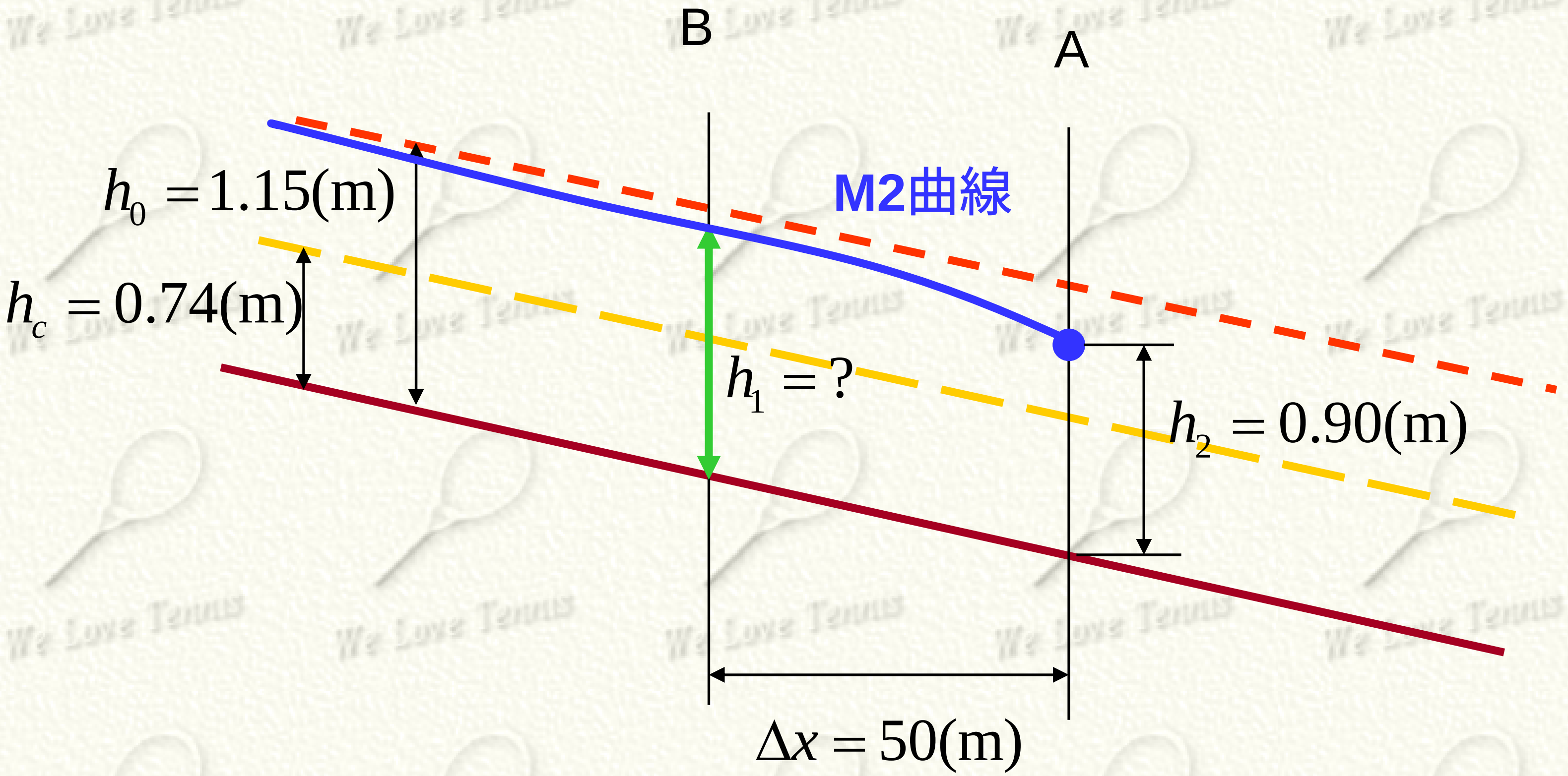
$$i = 1/1000 = 0.001 < i_c = 0.00433$$ なので緩勾配水路

(3) 等流水深および限界水深を求めよ。

$$h_0 = \left(\frac{n^2 q^2}{i}\right)^{\frac{3}{10}} = \left(\frac{0.02^2 \times (20/10)^2}{1/1000}\right)^{\frac{3}{10}} = 1.15(\mathrm{m})$$

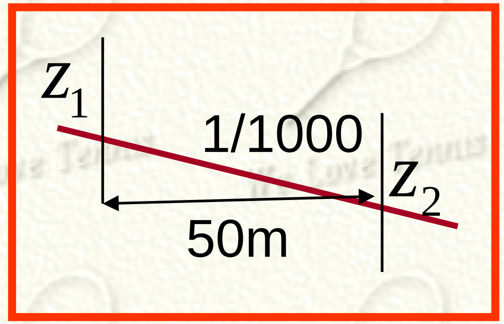
$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(20/10)^2}{9.8}} = 0.74(\mathrm{m})$$

(4) A地点の水深が0.9(m)とする。A地点上流に向かう水面形の分類を述べよ。また、A地点から50m上流のB地点の水深を求めよ.



緩勾配水路で $h_c < h < h_0$ なのでM2曲線

$$f(X) = X + \alpha X^{-2} + \beta X^{-\frac{10}{3}} + \gamma$$



$$\alpha = \frac{Q^2}{2gB_1^{\,2}} = \frac{20^2}{2\times 9.8\times 10^2} = 0.204$$

$$\beta = -\frac{n^2 Q^2 \Delta x}{2B_1^{\,2}} = -\frac{0.02^2\times 20^2\times 50}{2\times 10^2} = -0.04$$

$$z_1 - z_2 = 50/1000 = 0.05$$

$$\varepsilon = -z_2 + z_1 - h_2 - \frac{Q^2}{2gB_2^{\,2}h_2^{\,2}} - \frac{n^2 Q^2 \Delta x}{2B_2^{\,2}h_2^{\frac{10}{3}}} = 0.05 - 0.9 - \frac{20^2}{2\times 9.8\times 10^2\times 0.9^2} - \frac{0.02^2\times 20^2\times 50}{2\times 10^2\times 0.9^{\frac{10}{3}}}$$

$$= -1.159$$

$$f(X) = X + 0.204X^{-2} - 0.04X^{-\frac{10}{3}} - 1.159$$

$$f'(X) = 1 - 0.408X^{-3} + 0.133X^{-\frac{13}{3}}$$

$X_0 = h_2 = 0.9\mathrm{m}$ とする。

１回目

$X_0 = 0.900, \quad f(X_0) = -0.0637, \quad f'(X_0) = 0.6506 \rightarrow \Delta X = 0.09785 \rightarrow X_0 = 0.998$

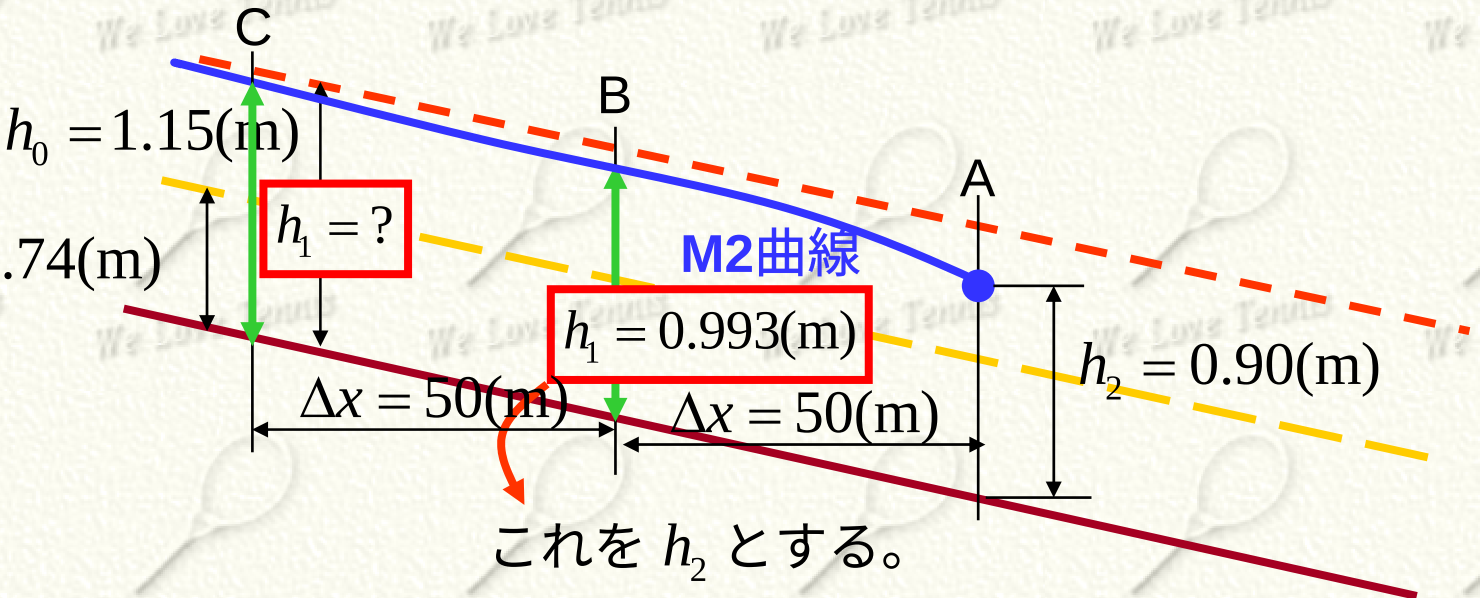
２回目

$X_0 = 0.998, \quad f(X_0) = 0.00374, \quad f'(X_0) = 0.7248 \rightarrow \Delta X = -0.00517 \rightarrow X_0 = 0.993$

３回目

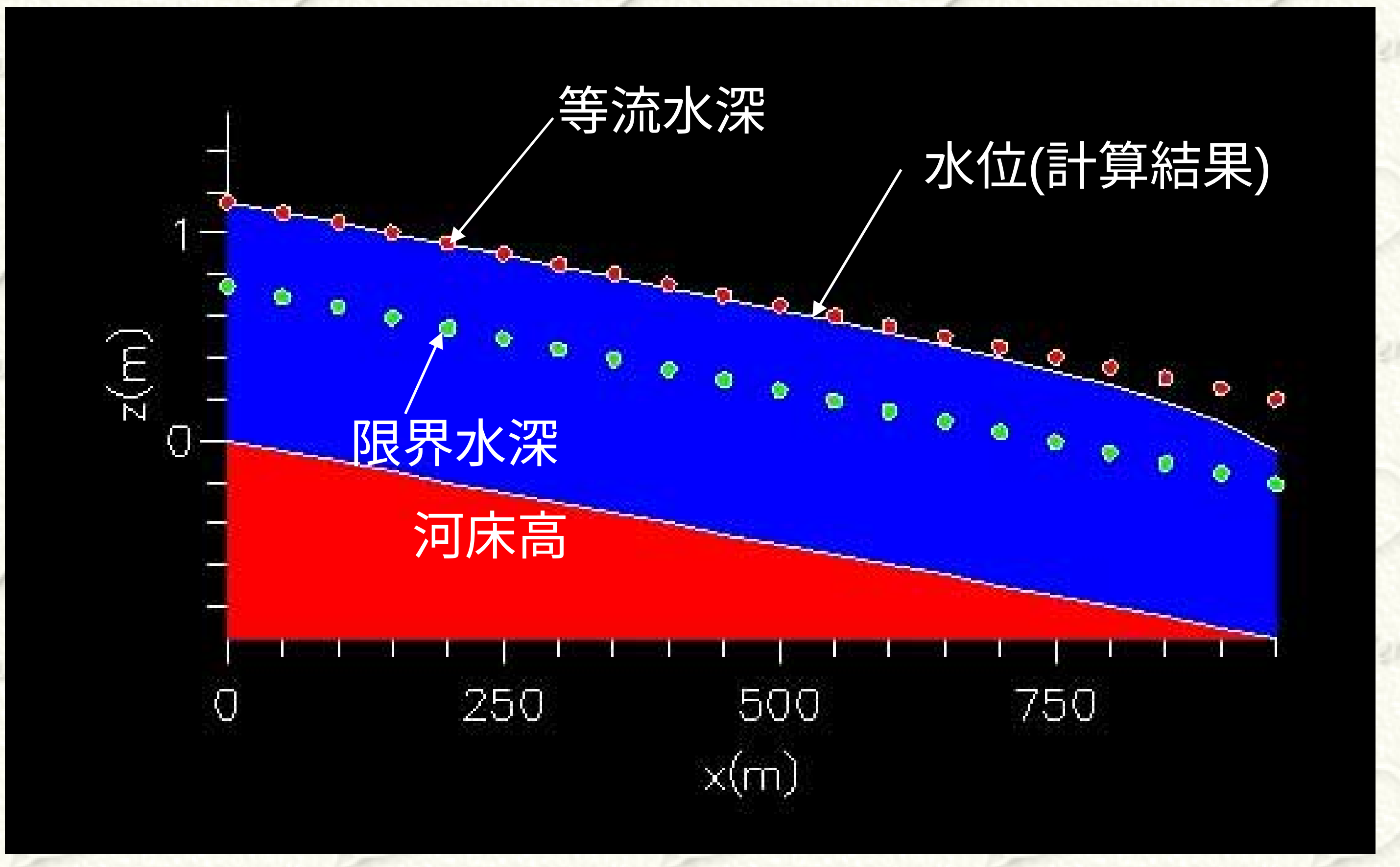
$X_0 = 0.993, \quad f(X_0) = 0.0000087, \quad f'(X_0) = 0.7204 \rightarrow \underbrace{\boxed{\Delta X = -0.00001213}}_{\approx 0} \rightarrow X_0 = 0.993$

したがって、$X = 0.993 \rightarrow h_1 = 0.993(\mathrm{m})$



(5) 同様に50m毎に上流に向かって水位を計算せよ。

下流端からの距離(m)	水深(m)
0	0.900
50	0.993
100	1.036
150	1.064
200	1.084
250	1.098
300	1.109
350	1.117
400	1.124
450	1.129
500	1.134
550	1.137
600	1.140
650	1.142
700	1.144
750	1.145
800	1.146
850	1.147
900	1.148
950	1.149



M2曲線となった。

(6) 下流端の水深が1.5mのとき同様な計算をせよ。

下流端からの距離(m)	水深(m)
0	1.5
50	1.467
100	1.436
150	1.407
200	1.379
250	1.353
300	1.329
350	1.307
400	1.287
450	1.269
500	1.253
550	1.238
600	1.225
650	1.214
700	1.204
750	1.196
800	1.189
850	1.182
900	1.177
950	1.173

M1曲線