一般座標による2次元流の基礎式

清水康行
北海道大学大学院工学研究科
水圏工学講座助教授
yasu@eng.hokudai.ac.jp

2002 年 12 月 13 日版

1　直交座標の基礎式

(x, y) を直交座標として 2 次元流れの基礎式を以下のように表す.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial (huv)}{\partial y} = -hg\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} + D^x \tag{2}$$

$$\frac{\partial (vh)}{\partial t} + \frac{\partial (huv)}{\partial x} + \frac{\partial (hv^2)}{\partial y} = -hg\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho} + D^y \tag{3}$$

ただし,

$$\frac{\tau_x}{\rho} = C_d u\sqrt{u^2+v^2} \qquad \frac{\tau_y}{\rho} = C_d v\sqrt{u^2+v^2} \tag{4}$$

$$D^x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu_t \frac{\partial (uh)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_t \frac{\partial (uh)}{\partial y}\right] \tag{5}$$

$$D^y = \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu_t \frac{\partial (vh)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_t \frac{\partial (vh)}{\partial y}\right] \tag{6}$$

2　座標変換

(ξ, η) を一般 (非直交) 座標とする.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{8}$$

または,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{9}$$

ただし,

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{10}$$

同様に,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial y} \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y} \tag{12}$$

または,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{13}$$

ただし,

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad y_\xi = \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad y_\eta = \frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{14}$$

従って,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x} \begin{pmatrix} \eta_y & -\eta_x \\ \\ -\xi_y & \xi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{15}$$

ここで, $J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x$ とすると,

$$\frac{1}{J}\begin{pmatrix} \eta_y & -\eta_x \\ -\xi_y & \xi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix} \tag{16}$$

なので,

$$x_\xi = \frac{1}{J}\eta_y, \quad y_\xi = -\frac{1}{J}\eta_x, \quad x_\eta = -\frac{1}{J}\xi_y, \quad y_\eta = \frac{1}{J}\xi_x \tag{17}$$

または,

$$\eta_y = Jx_\xi, \quad \eta_x = -Jy_\xi, \quad \xi_y = -Jx_\eta, \quad \xi_x = Jy_\eta \tag{18}$$

$$J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = J^2(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \tag{19}$$

より,

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \tag{20}$$

流速の (ξ, η) 成分を (u^ξ, u^η) とすると,

$$u^\xi = \xi_x u + \xi_y v \tag{21}$$
$$u^\eta = \eta_x u + \eta_y v \tag{22}$$

または,

$$\begin{pmatrix} u^\xi \\ u^\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \eta_y & -\xi_y \\ -\eta_x & \xi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\xi \\ u^\eta \end{pmatrix} \tag{24}$$

3 一般座標における基礎式

3.1 連続式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{hu^\xi}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{hu^\eta}{J}\right) = 0 \tag{25}$$

3.2 運動方程式 (非保存形表示)

ξ, η 方向の運動方程式は, 水深・流速が連続の場合,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\xi}{\partial t} + u^\xi \frac{\partial u^\xi}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta} + \alpha_1 u^\xi u^\xi + \alpha_2 u^\xi u^\eta + \alpha_3 u^\eta u^\eta = \\ -g\left[(\xi_x^2 + \xi_y^2)\frac{\partial H}{\partial \xi} + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)\frac{\partial H}{\partial \eta}\right] \\ -\frac{C_d u^\xi}{hJ}\sqrt{(\eta_y u^\xi - \xi_y u^\eta)^2 + (-\eta_x u^\xi + \xi_x u^\eta)^2} + D^\xi \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\eta}{\partial t} + u^\xi \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} + \alpha_4 u^\xi u^\xi + \alpha_5 u^\xi u^\eta + \alpha_6 u^\eta u^\eta = \\ -g\left[(\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y)\frac{\partial H}{\partial \xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2)\frac{\partial H}{\partial \eta}\right] \\ -\frac{C_d u^\eta}{hJ}\sqrt{(\eta_y u^\xi - \xi_y u^\eta)^2 + (-\eta_x u^\xi + \xi_x u^\eta)^2} + D^\eta \end{aligned} \tag{27}$$

ただし,

$$\alpha_1 = \xi_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \xi_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \quad \alpha_2 = 2\left(\xi_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \xi_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}\right), \quad \alpha_3 = \xi_x \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \xi_y \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \tag{28}$$

$$\alpha_4 = \eta_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \eta_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \quad \alpha_5 = 2\left(\eta_x \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_y \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}\right), \quad \alpha_6 = \eta_x \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \eta_y \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \tag{29}$$

$$D^\xi = \left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left[\nu_t \left(\xi_x \frac{\partial u^\xi}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta}\right)\right] + \left(\xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left[\nu_t \left(\xi_y \frac{\partial u^\xi}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta}\right)\right] \tag{30}$$

$$D^\eta = \left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left[\nu_t \left(\xi_x \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta}\right)\right] + \left(\xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left[\nu_t \left(\xi_y \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta}\right)\right] \tag{31}$$

4　変数の次元に関する注意事項

一般に ξ, η の次元は無次元量である．例えば,ξ, η は計算領域内で

$$0 \le \xi \le 1, \qquad 0 \le \eta \le 1 \tag{32}$$

のように定義するのが一般的である．したがって一般座標上の速度の反変成分表示する場合, 反変成分の定義式

$$u^\xi = \xi_x u + \xi_y v, \quad u^\eta = \eta_x u + \eta_y v \tag{33}$$

において, $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ などの次元は [1/長さ] なので, u^ξ, u^η の次元は [1/時間] となることに注意をする必要がある．u^ξ, u^η はそれぞれ ξ, η 軸方向という方向は表しているがその大きさは [速度=長さ/時間] の次元ではない．そこで, これらを [速度] の次元で表すためには, 局所的な格子間隔を実際の長さで表す必要がある．

局所的な格子サイズを $\Delta\tilde{\xi}$, $\Delta\tilde{\eta}$ で表し, これらと一般座標上の格子サイズ $\Delta\xi$ および $\Delta\eta$ の比を次式で定義する．

$$\frac{\Delta\xi}{\Delta\tilde{\xi}} = \xi_r, \qquad \frac{\Delta\eta}{\Delta\tilde{\eta}} = \eta_r \tag{34}$$

これらを用いて, $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ を以下のように表す．

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_r \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} = \xi_r \tilde{\xi}_x, \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \xi_r \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} = \xi_r \tilde{\xi}_y \tag{35}$$

$$\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta_r \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} = \eta_r \tilde{\eta}_x, \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \eta_r \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} = \eta_r \tilde{\eta}_y \tag{36}$$

以上より [速度] の次元を持つ速度の反変成分を $\tilde{u}^\xi$, $\tilde{u}^\eta$ とすると, それぞれ以下のようになる．

$$\tilde{u}^\xi = \tilde{\xi}_x u + \tilde{\xi}_y v = \frac{u^\xi}{\xi_r}, \quad \tilde{u}^\eta = \tilde{\eta}_x u + \tilde{\eta}_y v = \frac{u^\eta}{\eta_r} \tag{37}$$

5　拡散項の簡略化

一般座標の運動方程式中の拡散項 D^ξ, D^η については展開すると項の数が膨大になるので以下様な条件を仮定して簡略化を行う.

1. メトリック係数の 2 階微分量を局所的にゼロとする.
2. 局所的に擬似直交座標として扱う.

この結果, 拡散項は近似的に以下のように表せる.

$$D^\xi \simeq \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\nu_t \xi_r^2 \frac{\partial u^\xi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\nu_t \eta_r^2 \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta}\right) \tag{38}$$

$$D^\eta \simeq \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\nu_t \xi_r^2 \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\nu_t \eta_r^2 \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta}\right) \tag{39}$$

ここで, ξ_r, η_r は一般座標上の局所的な格子サイズと, 実距離の比率を表す係数で, (34) 式で定義される.

なお, 上記 D^ξ, D^η の近似式の誘導には局所的な直交関係の仮定より以下の関係が用いられている.

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 = \xi_r^2(\widetilde{\xi_x}^2 + \widetilde{\xi_y}^2) = \xi_r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \xi_r^2 \tag{40}$$

$$\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y = \xi_r\eta_r(\widetilde{\xi_x}\widetilde{\eta_x} + \widetilde{\xi_y}\widetilde{\eta_y}) = \xi_r\eta_r(-\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta) = 0 \tag{41}$$

$$\eta_x^2 + \eta_y^2 = \eta_r^2(\widetilde{\eta_x}^2 + \widetilde{\eta_y}^2) = \eta_r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \eta_r^2 \tag{42}$$

$$J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \xi_r\eta_r(\widetilde{\xi_x}\widetilde{\eta_y} - \widetilde{\xi_y}\widetilde{\eta_x}) = \xi_r\eta_r(\sin^2\theta + \cos^2\sin\theta) = \xi_r\eta_r \tag{43}$$

ただし, θ は x 軸と ξ 軸 (または, y 軸と η 軸) のなす角度である.

6　2 次元流砂連続式

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{\partial q^x}{\partial x} + \frac{\partial q^y}{\partial y}\right] = 0 \tag{44}$$

ただし, (x, y) は互いに直交する平面座標軸, t は時間, z_b は河床高, q^x, q^y は x, y 方向の単位幅掃流砂量, λ は河床材料の空隙率.

流れの連続式と同様に上式を一般座標に変換する.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{z_b}{J}\right) + \frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{q^\xi}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{q^\eta}{J}\right)\right] = 0 \tag{45}$$

ただし, q^ξ, q^η は ξ, η 方向の単位幅掃流砂量の反変成分である. なお, 速度の反変成分と同様に, 単位幅流砂量の反変成分も実際の単位幅流砂量の次元である [長さ ^{2}/時間] で表すためには, 以下の変換が必要となる.

$$\widetilde{q^\xi} = \frac{q^\xi}{\xi_r}, \qquad \widetilde{q^\eta} = \frac{q^\eta}{\eta_r} \tag{46}$$

7　河床せん断力と掃流砂量

合成流速 V を次式で定義する.

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{47}$$

河床に作用する無次元全せん断力 τ_* は,

$$\tau_* = \frac{hI_e}{s_g d} \tag{48}$$

ただし, h は水深, I_e はエネルギー勾配, s_g は水中比重, g は重力加速度, d は河床材料の粒径である. I_e にマニング則を適用すると, τ_* は次式となる.

$$\tau_* = \frac{C_d V^2}{s_g g d} = \frac{n_m^2 V^2}{s_g d h^{1/3}} \tag{49}$$

ただし, n_m はマニングの粗度係数である. 水深平均流速の方向 (V の方向) の全掃流砂量 q_b は次式で求める.

$$q_b = \frac{17}{\cos\theta_b} \tau_*^{3/2} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right) \left[1 - \sqrt{\frac{2\tau_{*c}\cos\theta_b}{\tau_*}} + 2\left(\tan\theta_b - \frac{\partial z_b}{\partial s}\right)\right] \sqrt{s_g d g^3} \tag{50}$$

ここで, θ_b は流路平均勾配, τ_{*c} は無次元限界掃流力で岩垣の式で求める. 式 (50) は芦田・道上の式 [5] に Kovacs & Parker [6] の理論を用いて重力効果の補正を加えたものである. 渡邉ら [2] によれば, ξ, η 方向の掃流砂量は次式で与えられる.

$$\widetilde{q^\xi} = q_b \left[\frac{\widetilde{u_b^\xi}}{V_b} - \gamma\left(\frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\xi}} + \cos\theta \frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\eta}}\right)\right] \tag{51}$$

$$\widetilde{q^\eta} = q_b \left[\frac{\widetilde{u_b^\eta}}{V_b} - \gamma\left(\frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\eta}} + \cos\theta \frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\xi}}\right)\right] \tag{52}$$

ただし, $\widetilde{u_b^\xi}$ および $\widetilde{u_b^\eta}$ はそれぞれ ξ および η 方向の河床近傍の流速, V_b は河床近傍の合成流速, θ は ξ 軸と η 軸のなす角度である. γ は斜面勾配による流砂の補正係数であり, 長谷川 [3] によれば次式で与えられる.

$$\gamma = \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \tag{53}$$

ただし, μ_s および μ_k は河床材料の静止摩擦係数および動摩擦係数である (一般的な値として $\mu_s\mu_k = 0.5$).

8　河床近傍の流速の算定

水深平均流の流れに沿って, 水深平均流速と河床近傍の流速の関係を次式のような単純な関係式を仮定する.

$$\widetilde{u_b^s} = \beta V \tag{54}$$

ただし, $\widetilde{u_b^s}$ は水深平均流の流線 (以下単純に流線と呼ぶ) に沿った河床近傍の流速である. Engelund [4] によれば, 水深方向の流速分布に放物線分布を用いた場合, β は次式となる.

$$\beta = 3(1-\sigma)(3-\sigma), \qquad \sigma = \frac{3}{\phi_0 \kappa + 1} \tag{55}$$

ただし, ϕ_0 は流速係数 $(= V/u_*)$, κ はカルマン乗数 (=0.4) である.

一般に, 流線が曲っている場合には 2 次流 (螺旋流) が発生する, ここではこの 2 次流による河床近傍の流速の算定に次式を用いる.

$$\widetilde{u_b^n} = \widetilde{u_b^s} N_* \frac{h}{r_s} \tag{56}$$

ただし, $\widetilde{u_b^n}$ は流線の方向に直交する方向 (流線方向から反時計周りに 90 度の方向) の河床近傍の流速, r_s は流線の曲率半径, N_* は定数 (=7, Engelund [4]) である.

(54) 式および (56) 式より (51) 式および (52) 式中の V_b は,

$$V_b = \sqrt{\widetilde{u_b^s}^2 + \widetilde{u_b^n}^2} \approx \widetilde{u_b^s} \tag{57}$$

となる. なお上式の近似は, 一般に $\widetilde{u_b^n}$ は $\widetilde{u_b^s}$ より 1 オーダー小さい値となるためである.

(51) 式および (52) 式中の $\widetilde{u_b^\xi}$ および $\widetilde{u_b^\eta}$ は以下の変換により求められる.

$$\begin{aligned}
\widetilde{u_b^\xi} &= \frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial s}\widetilde{u_b^s} + \frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial n}\widetilde{u_b^n} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial y}\right)\widetilde{u_b^s} + \left(\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial y}\right)\widetilde{u_b^n} \\
&= \left(\cos\theta_s\tilde{\xi}_x + \sin\theta_s\tilde{\xi}_y\right)\widetilde{u_b^s} + \left(-\sin\theta_s\tilde{\xi}_x + \cos\theta_s\tilde{\xi}_y\right)\widetilde{u_b^n} \\
&= \frac{1}{\xi_r}\left\{\left(\cos\theta_s\xi_x + \sin\theta_s\xi_y\right)\widetilde{u_b^s} + \left(-\sin\theta_s\xi_x + \cos\theta_s\xi_y\right)\widetilde{u_b^n}\right\}
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{u_b^\eta} &= \frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial s}\widetilde{u_b^s} + \frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial n}\widetilde{u_b^n} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial y}\right)\widetilde{u_b^s} + \left(\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial y}\right)\widetilde{u_b^n} \\
&= \left(\cos\theta_s\tilde{\eta}_x + \sin\theta_s\tilde{\eta}_y\right)\widetilde{u_b^s} + \left(-\sin\theta_s\tilde{\eta}_x + \cos\theta_s\tilde{\eta}_y\right)\widetilde{u_b^n} \\
&= \frac{1}{\eta_r}\left\{\left(\cos\theta_s\eta_x + \sin\theta_s\eta_y\right)\widetilde{u_b^s} + \left(-\sin\theta_s\eta_x + \cos\theta_s\eta_y\right)\widetilde{u_b^n}\right\}
\end{aligned} \tag{59}$$

ただし, s および n はそれぞれ流線およびこれに直交する方向を表し, 流線と x 軸のなす角度を θ_s として,

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{v}{V} = -\sin\theta_s, \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{u}{V} = \cos\theta_s \tag{60}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{u}{V} = \cos\theta_s, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{v}{V} = \sin\theta_s \tag{61}$$

などの関係を用いている. また, (55) 式のように β を表したが, (51), (52) 式の右辺第 1 項には結局, 分子・分母共に β が含まれることになるので, β が任意の値で良いことになる.

9　流線の曲率半径

以下に (56) 式で用いられる流線の流線の曲率 (1/曲率半径) は次式で求められる．

$$\frac{1}{r_s} = \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \tag{62}$$

θ_s は x 軸と s 方向の角度なので,

$$\theta_s = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \tag{63}$$

したがって,

$$\frac{1}{r_s} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\tan^{-1}(T)\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left[\tan^{-1}(T)\right]\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{1+T^2}\frac{\partial T}{\partial s} \tag{64}$$

ただし, $T = v/u$ としている．ここで,

$$\frac{1}{1+T^2} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2} = \frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{u^2}{V^2} \tag{65}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u\dfrac{\partial v}{\partial s} - v\dfrac{\partial u}{\partial s}}{u^2} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{u}{V}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{V}\frac{\partial}{\partial y}\\ &= \frac{u}{V}\left(\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x\frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \frac{v}{V}\left(\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\end{aligned} \tag{67}$$

なので, 曲率 $1/r_s$ は次式で表される．

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_s} = \frac{1}{V^3}\Bigg[&u^2\left(\xi_x\frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + uv\left(\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\\ &-uv\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - v^2\left(\xi_y\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{68}$$

10　まとめ

河床変動の計算は以下の手順で行われる．

1. 2 次元一般座標の流れの計算 (u^ξ, u^η, u, v, h の計算)
2. (47) 式による V の計算
3. (49) 式による τ_* の計算
4. (50) 式による q_b の計算
5. (54) 式による $\widetilde{u_b^s}$ の計算
6. (68) 式による $1/r_s$ の計算
7. (56) 式による $\widetilde{u_b^n}$ の計算
8. (58),(59) 式による $\widetilde{u_b^\xi}, \widetilde{u_b^\eta}$ の計算
9. (51),(52) 式による $\widetilde{q^\xi}, \widetilde{q^\eta}$ の計算
10. (46) 式による q^ξ, q^η の計算
11. (45) 式による z_b の更新

参考文献

[1] 芦田和男, 道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第 206 号, 土木学会, pp.59–69, 1972.

[2] 渡邉明英, 福岡捷二, 安竹悠, 川口広司: 河道湾曲部における河床変動を抑制する樹木群水制の配置方法, 河川技術論文集, 第 7 巻, pp.285–290, 2001 年 6 月.

[3] 長谷川和義: 沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究, 北海道大学博士論文, pp.1–184, 1984.

[4] Engelund, F.: Flow and Bed Topography in Channel Bend, Jour. of Hydr. Div., ASCE, Vol.100. HY11, pp.1631–1648, 1974.

[5] 芦田和男, 道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第 206 号, pp.59–69, 1972.

[6] Kovacs, A. and Parker, G.: A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels. *Jour. of Fluid Mrch.*, 267, 153–183., 1994.