# 風・密度・温度変化の影響を考慮した
# 鉛直２次元流の計算方法

## 1.　基礎方程式

### 1.1　流れの基礎式

水平方向 (流下方向) に $x$ 軸, 鉛直方向に $y$ 軸をとると基礎式は次のようになります.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]-g \tag{3}$$

ここで, $x$ および $y$ はそれぞれ水平方向および鉛直上方向の距離, $t$ は時間, $u$ および $v$ はそれぞれ $x$, $y$ 方向の距離, $\rho$ は流体の密度, $g$ は重力加速度, $p$ は圧力, $\nu$ は渦動粘性係数です. $y$ は鉛直方向としていますので, (3) 式の右辺に重力加速度が入っていることに注意してください.

### 1.2　物質輸送の式

流れの計算はこれらの式で OK ですが, この他に流れと一緒に輸送される量があればこの他にその輸送 (拡散) を記述する式が必要になります. たとえば輸送される物質の濃度を $c$ とすると, その移流･拡散方程式は以下のように記述されます.

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}=D\left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right] \tag{4}$$

ここで, $D$ は拡散係数です. 通常は濃度 $c$ が変化すると, 流体の密度 $\rho$ も厳密には変化しますので (2),(3) 式中の $\rho$ は (4) 式の $c$ の変化に伴って変化することを考慮しなくてはなりません. 例えば, $c$ が塩分濃度の場合, 現実に塩分濃度 (の差) が数%のオーダーまでありますので, この場合の $c$ は (2),　(3) 式中の密度 $\rho$ と連動させなくてはいけません. この場合 $c$ と $\rho$ の関係は温度が一定の場合には近似的に次式となります.

$$1+c=\frac{\rho}{\rho_w} \tag{5}$$

ただし, $\rho_w$ は水の密度で, この場合の $\rho$ は塩水の密度ということになります. 結局, (5) 式の関係を (4) 式に代入して, $\rho_w$ は一定であることを考慮しますと,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}=D\left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right] \tag{6}$$

ということになり, (4) 式と全く同じ式が $\rho$ でも成立することになります.

以上より密度変化を考慮する場合の基礎式は (1), (2), (3), (6) の 4 本の式に対して, 変数が $u$, $v$, $p$, $\rho$ の 4 つということで系が閉じることになります.

### 1.3 温度変化を伴う流れ

温度 $T$ についても, 流体の運動に乗って移流・拡散しますので, 次式でその変化を記述できます.

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=K_t\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] \tag{7}$$

ここで, $T$ は温度, $K_t$ は温度の拡散係数で

$$K_t=\frac{\lambda}{\rho c_p} \tag{8}$$

ただし, $\lambda$ は熱伝導率, $c_p$ は定圧比熱です. 詳しくは物理の教科書を参照下さい.

いま対象とする領域全体が温度 $T_0$ で流体が静止状態の時の圧力を $p_0$ として, 実際の圧力 $p$ を,

$$p=p_0+p' \tag{9}$$

と表すことにします. 前記のように温度が $T_0$ の時の流体の密度を $\rho_0$ とすると $p_0$ は次式で表されます.

$$p_0=g\int_y^H \rho_0 dy=\rho_0 g(H-y) \tag{10}$$

ただし, $H$ は水面の高さ (水位) です.

$$\frac{\partial p_0}{\partial x}=\rho_0 g\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p_0}{\partial y}=-\rho_0 g \tag{11}$$

なので, (2) および (3) 式の圧力項は以下のようになります.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\rho_0}{\rho}g\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{12}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\rho_0}{\rho}g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} \tag{13}$$

上記の 2 式を (2) および (3) 式に代入して $p'$ を $p$ と書き直すと,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}g\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial H}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-g\frac{\rho-\rho_0}{\rho}+\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \tag{15}$$

となります. (14) および (15) 式を (2) および (3) 式と比較すると, (14) 式では右辺第 2 項に水面勾配 $(\partial H/\partial x)$ の項が加わったことと, (15) 式では右辺第 2 項に密度差 $(\rho-\rho_0)$ による

source 項が加わり, (3) 式にあった重力加速度 $(-g)$ が無くなったことです．この形式にすることによって密度差による影響がより明快になったと思います．ここで, (15) 式右辺第 2 項の密度差に関する項は浮力項と呼ばれ, (14) および (15) 式は浮力を考慮した NS 方程式と呼ばれます．(14) 式および (15) 式の右辺の分母に現れる局所的な密度 $\rho$ を近似的に基準密度 $\rho_0$ に等しいとすることをブシネスク近似と言い, この近似を行っても密度流の計算結果に及ぼす影響は殆ど無いことが知られています．また, ブシネスク近似を行うことによって以降の計算もかなり簡単になります．ブシネスク近似を行った, 浮力を考慮した NS 方程式は以下のとおりです.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}-g\frac{\partial H}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{16}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}-g\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}+\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \tag{17}$$

あとは, (17) 式右辺第 2 項の $\rho$ さえ分かれば, NS 方程式の計算が可能となります.

温度 $T$ と密度 $\rho$ の関係を表すために次式の体積膨張係数を導入します．これも詳しくは物理の教科書を参照ください.

$$\beta=\frac{1}{(1/\rho)}\frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \tag{18}$$

ここで,

$$\frac{\partial(1/\rho)}{\partial T}=\frac{\partial(1/\rho)}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}=-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T} \tag{19}$$

なので,

$$\beta=\frac{1}{\rho_0}\frac{\rho-\rho_0}{T-T_0} \tag{20}$$

となります．したがって, (17) 式の右辺第 2 項は以下のようになります.

$$-g\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}=-g\beta(T_0-T) \tag{21}$$

以上をまとめますと,

| |
|---|
| 温度変化を伴う流れの基礎式は, 連続式が (1) 式, 運動方程式が (16) と (17) 式, 温度の拡散方程式が (7) 式温度と密度の関係を表すのが (21) 式ということになります．　なお，当然ですが温度変化も密度変化も無い場合の基礎式は (1),(2),(3) で OK です. |

## 2.　風による表面応力

水面に風が吹けば表面応力が発生し，それによって流体が動きだします．これを吹送流と言います．ところで，この風に入れる応力は基礎方程式のどの部分に作用させたら良いでしょう．これは (1) 式,(2) 式右辺の粘性項に作用することになります．(1) 式,(2) 式の右辺はもともと下記の応力表示を簡略化したものです.

$$T_x \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sigma_{xx}}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{yx}}{\rho}\right)\approx\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\approx\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right] \tag{22}$$

$$T_y \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sigma_{xy}}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{yy}}{\rho}\right)\approx\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\approx\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}\right] \quad (23)$$

このうち,$\tau_y x$ が $y$ 軸に鉛直な方向に働く $x$ 軸方向のせん断力ですので, 以下のように与えます.

$$\frac{\tau_{yx}}{\rho}=\begin{cases}\nu\dfrac{\partial u}{\partial y} & [\text{流体内部}]\\[2ex] \dfrac{W_x}{\rho} & [\text{水面}]\\[2ex] u_*|u_*|=C_b u|u| & [\text{河床}]\end{cases} \quad (24)$$

ただし,$W_x$ は風によって流体に作用する表面応力, $C_b$ は河床の摩擦係数です. $W_x$ と風速 $W$ の関係は次式で表されます.

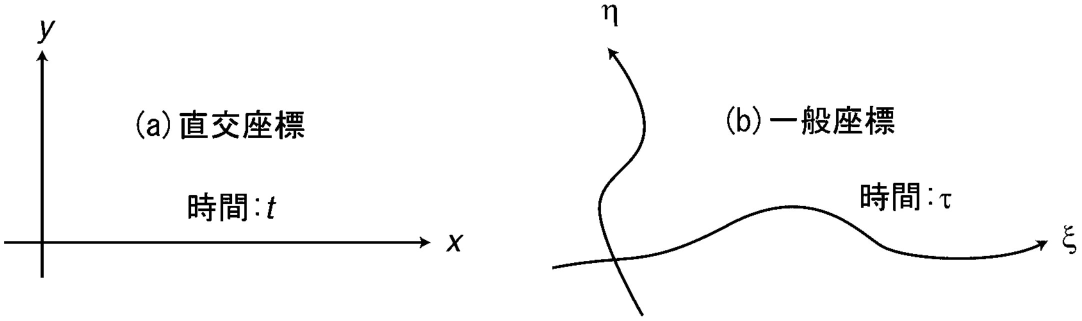
$$W_x=\gamma^2\rho_a W \quad (25)$$

ただし,$\rho_a$ は大気の密度であり $\gamma^2=0.01\sim0.03$ の定数です.

## 3. 座標変換

### 3.1 直交座標から一般座標への変換

座標変換については流体力学の教科書などを参照して下さい. ここでは結果だけ示します. **図–1(a)** に示すような直交座標 $(x,y)$, 時間 $t$ で表される基礎式として前記の (1), (16), (17) および (7) 式を, **図–1(b)** に示す一般 (非直交) 座標 $(\xi,\eta)$, 時間 $\tau$ で表される座標系に変換すると次のようになります.




**図– 1 一般座標と直交座標**

$$\frac{\partial(JU)}{\partial\xi}+\frac{\partial(JV)}{\partial\eta}=0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}+(U+\xi_t)\frac{\partial u}{\partial\xi}+(V+\eta_t)\frac{\partial u}{\partial\eta}=-\frac{1}{\rho_0}\left(\xi_x\frac{\partial p}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial p}{\partial\eta}\right)-g\left(\xi_x\frac{\partial H}{\partial\xi}+\eta_x\frac{\partial H}{\partial\eta}\right)+\nu\Delta u \quad (27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}+(U+\xi_t)\frac{\partial v}{\partial \xi}+(V+\eta_t)\frac{\partial v}{\partial \eta}=-\frac{1}{\rho_0}\left(\xi_y\frac{\partial p}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)-g\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}+\nu\Delta v \tag{28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}+(U+\xi_t)\frac{\partial T}{\partial \xi}+(V+\eta_t)\frac{\partial T}{\partial \eta}=D_t\Delta K_t \tag{29}$$

ただし,

$$\xi_t=\frac{\partial \xi}{\partial t},\quad \eta_t=\frac{\partial \eta}{\partial t},\quad \xi_x=\frac{\partial \xi}{\partial x},\quad \eta_x=\frac{\partial \eta}{\partial x},\quad \xi_y=\frac{\partial \xi}{\partial y},\quad \eta_y=\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{30}$$

$$\Delta=\frac{\alpha_*}{J^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{2\beta_*}{J^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\gamma_*}{J^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+D_*\frac{\partial}{\partial \xi}+E_*\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{31}$$

$$U=\xi_x u+\xi_y v,\qquad V=\eta_x u+\eta_y v \tag{32}$$

$$\alpha_*=x_\eta^2+y_\eta^2,\quad \beta_*=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta,\quad \gamma_*=x_\xi^2+y_\xi^2 \tag{33}$$

$$D_*=\xi_{xx}+\xi_{yy},\qquad E_*=\eta_{xx}+\eta_{yy} \tag{34}$$

$$J=x_\xi y_\eta-y_\xi x_\eta=\frac{1}{\eta_y\xi_x-\eta_x\xi_y} \tag{35}$$

$$\xi_x=\frac{y_\eta}{J},\qquad \eta_x=-\frac{y_\xi}{J},\qquad \xi_y=-\frac{x_\eta}{J},\qquad \eta_y=\frac{x_\xi}{J} \tag{36}$$

また, $x_\xi$ などは $\dfrac{\partial x}{\partial \xi}$ などの 1 階の偏微分を表し, $\xi_{xx}$ などは $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ などの 2 階の偏微分を表します. なお, (25) 式は変数として温度 $T$ を用いていますが, 物質輸送を扱う場合はこの式の $T$ を $c$(濃度) の置き換えてください (以降の説明で共通です).

### 3.2 境界適合座標

(22) 式 ∼(25) 式は一般座標ですので, どんな形状にも適用可能ですが, このまま計算をするのはけっこう大変です. そこで, **図–2** のように実用上の問題を考慮して河床と水面に適合するような座標系を用いることにします. この場合, $(\xi,\eta,\tau)$ は以下のように表されます.

$$\xi=\frac{x}{L},\qquad \eta=\frac{y-y_b}{H-y_b}=\frac{y-y_b}{h},\qquad \tau=t \tag{37}$$

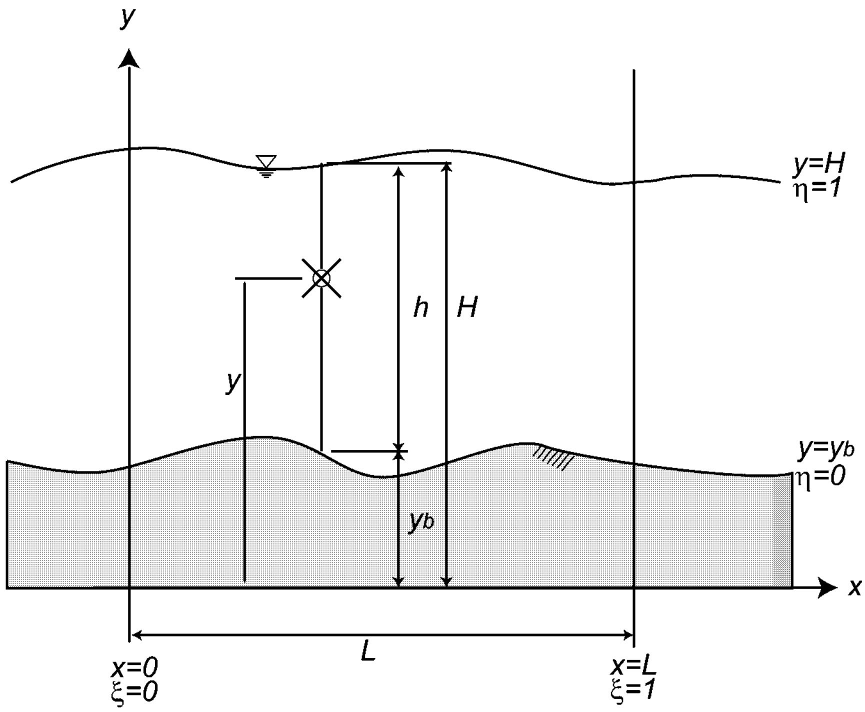
ここで, $L$ は対象とする水域の長さ, $y_b$ は河床高, $h$ は水深です. この座標系では境界は**表–1** のようになります.

この新しい座標系で (26) 式 ∼(32) 式の値は以下のように表されます.

$$\xi_t=0,\quad \eta_t=-\frac{\eta}{h}\frac{\partial h}{\partial \tau},\quad \xi_x=\frac{1}{L},\quad \xi_y=0,\quad \eta_x=-\frac{1}{Lh}\Omega,\quad \eta_y=\frac{1}{h} \tag{38}$$

$$J=Lh,\quad \alpha_*=h^2,\quad \beta_*=h\Omega,\quad \gamma_*=L^2+\Omega^2\simeq L^2 \tag{39}$$

$$D_*=0,\quad E_*=-\frac{1}{L^2h}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}-\frac{\Omega}{h}\frac{\partial h}{\partial \xi}\right],\quad U=\frac{u}{L},\quad V=\frac{1}{h}\left(v-\frac{u}{L}\Omega\right) \tag{40}$$




**図– 2 境界適合座標**

**表– 1 境界適合座標での境界の値**

| | $(x,y)$ 座標 | $(\xi,\eta)$ 座標 |
|---|---|---|
| 上流端 | $x=0$ | $\xi=0$ |
| 下流端 | $x=L$ | $\xi=1$ |
| 河床 | $y=y_b$ | $\eta=0$ |
| 水面 | $y=H$ | $\eta=1$ |

$$\Delta = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{2}{L^2}\frac{\Omega}{h}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{1}{L^2 h}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} - \frac{\Omega}{h}\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{41}$$

ただし,

$$\Omega = \eta\frac{\partial h}{\partial\xi} + \frac{\partial y_b}{\partial\xi} \tag{42}$$

$\Omega$ は河床で $\dfrac{\partial y_b}{\partial\xi}$, 水面で $\dfrac{\partial H}{\partial\xi}$ となる関数なので, 要するに河床で河床勾配, 水面で水面勾配, 河床と水面の間では座標軸の勾配ということになります. したがってこれらの勾配が 1 に比べて微小な場合は, $\Omega^2 \simeq 0$ という近似を行っています.

これらの関係を用いて基礎式を変換すると以下の様になります.

$$\frac{\partial(hu)}{\partial\xi} + \frac{\partial(Lv_1)}{\partial\eta} = 0 \tag{43}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u}{L}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v_2}{h}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho_0 L}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\Omega}{h}\frac{\partial p}{\partial \eta}\right) - \frac{g}{L}\frac{\partial H}{\partial \xi} + \nu \Delta u \tag{44}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{u}{L}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v_2}{h}\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho_0 h}\frac{\partial p}{\partial \eta} - g\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + \nu \Delta v \tag{45}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{u}{L}\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{v_2}{h}\frac{\partial T}{\partial \eta} = D_t \Delta T \tag{46}$$

ただし,

$$v_1 = v - \frac{u}{L}\Omega, \qquad v_2 = v_1 - \eta\frac{\partial h}{\partial \tau} = v_1 - \eta\frac{\partial H}{\partial \tau} \tag{47}$$

## 3.3 変数の変換

ここまでで, 使用する基礎式の誘導は完了した訳ですが, プログラミングの都合上, 変数の再変換を行います. ここでの変数の再変換は物理的な意味は無く, 単に便宜上の話です.

$$\begin{array}{lcl}
L\xi & \longrightarrow & x \\
\eta & \longrightarrow & y \\
\tau & \longrightarrow & t \\
y_b & \longrightarrow & \eta \\
\eta & \longrightarrow & \xi \\
\dfrac{\Omega}{L} & \longrightarrow & \Omega
\end{array}$$

この結果, 基礎式は下記のように再整理されます.

**流体の連続式**

$$\frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \tag{48}$$

**流体の運動方程式**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v_2}{h}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\Omega}{h}\frac{\partial p}{\partial y}\right) - g\frac{\partial H}{\partial x} + \nu \Delta u \tag{49}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v_2}{h}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0 h}\frac{\partial p}{\partial y} - g\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + \nu \Delta v \tag{50}$$

**温度の拡散方程式**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_2}{h}\frac{\partial T}{\partial y} = D_t \Delta T \tag{51}$$

**物質輸送の式**

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{v_2}{h}\frac{\partial c}{\partial y} = D_c \Delta c \tag{52}$$

ただし, $\Omega$, $v_1$, $v_2$ および $\Delta$ は以下のとおりです.

$$\Omega = \xi\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad v_1 = v - u\Omega, \qquad v_2 = v_1 - \xi\frac{\partial H}{\partial t} \tag{53}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2\Omega}{h}\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} + \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\Omega}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial \xi} \tag{54}$$

(48) 式は, (4) 式を境界適合座標に変換したものと考えて下さい. (46) 式の右辺第 2 項は浮力項で, (47) 式と (48) 式で求まる $T$ や $c$ と関連付ける必要があります. 前回も説明したとおり温度変化のみだと, 浮力項は単純に温度差で以下の式で表されます.

$$-g\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -g\beta(T_0 - T) \tag{55}$$

ところが, 密度は濃度によっても変化する場合はこの影響も考慮する必要があります. いま濃度 $c$ は質量濃度であるとして, 物質濃度が $c$ のときの流体の密度を $\rho$ とし, 基準密度 $\rho_0$ の時の物質濃度を $c_0$ とします. (5) 式より,

$$1 + c = \frac{\rho}{\rho_w} \tag{56}$$

ただし, $\rho_w$ は水の密度です. また $c_0$, $\rho_0$ についても同様に

$$1 + c_0 = \frac{\rho_0}{\rho_w} \tag{57}$$

したがって,

$$\rho = \rho_w(1 + c), \qquad \rho_0 = \rho_w(1 + c_0) \tag{58}$$

ゆえに, 濃度差のみの影響による浮力項は

$$-g\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -g\frac{\rho_w}{\rho_0}(c - c_0) \tag{59}$$

ということになります. 従って, 温度変化と濃度変化の両方の影響を考慮した浮力項は (50) 式と (54) 式の両方を考慮して,

$$-g\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -g\left[\beta(T_0 - T) + \frac{\rho_w}{\rho_0}(c - c_0)\right] \tag{60}$$

ということになります.

## 4. 分離解法

基礎式に分離解法を適用します. (44)~(48) は以下の式でまとめて表すことが可能です.

$$\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial x} + v_3\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial y} = \mathsf{S} + \mathsf{D} \tag{61}$$

ただし,

$$\mathsf{f} = (u,\ v,\ T,\ c)^T \tag{62}$$

$$\mathsf{S} = \left[ -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\Omega}{h} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - g \frac{\partial H}{\partial x},\ \ -\frac{1}{\rho_0 h} \frac{\partial p}{\partial y} - g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},\ 0,\ 0 \right]^T \tag{63}$$

$$\mathsf{D} = (\nu \Delta u,\ \nu \Delta v,\ D_t \Delta T,\ D_c \Delta c,\ )^T \tag{64}$$

$$v_3 = \frac{v_2}{h} \tag{65}$$

です. (56) 式に CIP 法を適用します.(56) 式を以下のように分離します.

- Non-advection Phase I

$$\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial t} = \mathsf{S} \tag{66}$$

- Non-advection Phase II

$$\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial t} = \mathsf{D} \tag{67}$$

- Advection Phase

$$\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathsf{f}}{\partial x} + v_3 \frac{\partial \mathsf{f}}{\partial y} = 0 \tag{68}$$

ある時刻の $\mathsf{f}$ を $\mathsf{f}^n$, 次のタイムステップの $\mathsf{f}$ を $\mathsf{f}^{n+1}$ として $\mathsf{f}^n \longrightarrow \mathsf{f}^{n+1}$ の計算を一発で行う替わりに, (61) 式で $\mathsf{f}^n \longrightarrow \overline{\mathsf{f}}$ を, (62) 式で $\overline{\mathsf{f}} \longrightarrow \tilde{\mathsf{f}}$ を, (63) 式で $\tilde{\mathsf{f}} \longrightarrow \mathsf{f}^{n+1}$ を段階的に計算します.

## 5. Non-advection Phase I

(58) 式に示したように, $T$ と $c$ に関する $\mathsf{S}$ の成分は 0 ですので, $u$ と $v$ のみの計算となります. (61) 式の $u$ と $v$ に関する部分はを以下のように表します.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + S_1 \tag{69}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0 h} \frac{\partial p}{\partial y} + S_2 \tag{70}$$

ただし,

$$S_1 = \frac{\Omega}{\rho_0 h} \frac{\partial p}{\partial y} - g \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad S_2 = -g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \tag{71}$$

(64) 式, (65) 式と (44) 式を連立して $p$ を求める必要がありますが, 結構複雑になることが予想されますので, ひとまず (64), (65) 式の右辺第 1 項のみを主要項と考え, これと (44) 式を連立することを考えてみます.

$$\frac{\overline{u} - u^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\overline{v} - v^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0 h} \frac{\partial p}{\partial y} \tag{72}$$

これより,

$$\overline{u} = u^n - \frac{\Delta t}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \overline{v} = v^n - \frac{\Delta t}{\rho_0 h}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{73}$$

この 2 式を (44) 式に代入するために以下の操作を行います.

$$\frac{\partial (h\overline{u})}{\partial x} = \frac{\partial (hu^n)}{\partial x} - \frac{\Delta t}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial p}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = \frac{\partial v^n}{\partial y} - \frac{\Delta t}{\rho_0 h}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \tag{74}$$

さらに, 局所的に $\dfrac{\partial v}{\partial y} \simeq \dfrac{\partial v_1}{\partial y}$ と仮定して, これらを (44) 式に代入しますと,

$$\frac{\partial (hu^n)}{\partial x} - \frac{\Delta t}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial v_1^n}{\partial y} - \frac{\Delta t}{\rho_0 h}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \tag{75}$$

または,

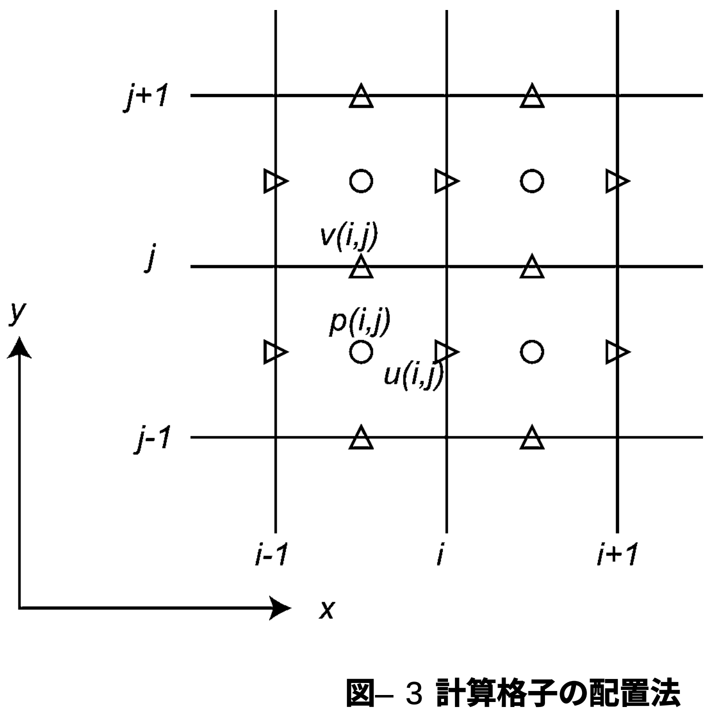
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{1}{h}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \mathrm{Div}\frac{\rho_0}{\Delta t} = 0 \tag{76}$$

となります. ただし,

$$\mathrm{Div} = \frac{\partial (hu^n)}{\partial x} + \frac{\partial v_1^n}{\partial y} \tag{77}$$

です. (72) 式を満たす $p$ を求め, この $p$ を用いて (68) 式で計算される $\overline{u}, \overline{v}$ が Non-Advection Phase I における流速成分の値となります.

それでは, ここで具体的に (72) 式から $p$ を求める方法を考えて見ましょう. **図–3** に示す計算格子上で (72) 式の各項は以下のように差分化されます.




**図– 3 計算格子の配置法**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{(h(i+1)+h(i)][p(i+1,j)-p(i,j)]-[h(i)+h(i-1)][p(i,j)-p(i-1,j)]}{2\Delta x^2} \tag{78}$$

$$\frac{1}{h}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{h(i)}\frac{p(i,j+1)-2p(i,j)+p(i,j-1)}{\Delta y} \tag{79}$$

$$\mathrm{Div} = \frac{[h(i)+h(i+1)]u^n(i,j)-[h(i-1)+h(i)]u^n(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{v^n(i,j)-v^n(i,j-1)}{\Delta y} \tag{80}$$

(73), (74) 式を (71) 式に代入して, $p(i,j)$ について整理すると次式のようになります.

$$p(i,j) = \frac{A_e p(i+1,j)+A_w p(i-1,j)+A_n p(i,j+1)+A_s p(i,j-1)+A_f}{A_p} \tag{81}$$

ただし,

$$A_n = A_s = \frac{1}{h(i)\Delta y^2} \tag{82}$$

$$A_w = \frac{h(i)+h(i-1)}{2\Delta x^2}, \qquad A_e = \frac{h(i+1)+h(i)}{2\Delta x^2} \tag{83}$$

$$A_f = -\frac{\mathrm{Div}\rho_0}{\Delta t} \tag{84}$$

したがって, (76) 式をすべての $(i,j)$ に関して繰り返し適用し, 定常に達した時の答えが $p(i,j)$ ということになります.

この繰り返し計算の結果得られた $p(i,j)$ を用いて (68) 式で $\overline{u}(i,j)$ および $\overline{v}(i,j)$ を求めることが可能となります. なお, (68) 式は通常の, 時間に対して前進差分, 空間に対して中央差分を用いることとします. すなわち,

$$\overline{u}(i,j) = u^n(i,j) + \left[-\frac{p(i+1,j)-p(i,j)}{\rho_0\Delta x} + S_1\right]\Delta t \tag{85}$$

$$\overline{v}(i,j) = v^n(i,j) + \left[-\frac{p(i,j+1)-p(i,j)}{\rho_0 h\Delta y} + S_2\right]\Delta t \tag{86}$$

## 6. Non-advection phase II および Advection phase

Non-advection phase II は拡散項なのですべてオーソドックスに, 時間に対しては前進差分で, 空間に対しては中央差分で計算できます. また Advection phase に関しては 2 次元の CIP 法を用いますが,2 次元の CIP 法は以前のテキストを見て下さい.

## 7. 境界条件

計算の境界条件および計算領域を**図–4** に示すように与えます. 図中の記号は添付のプログラムに対応しております.

### 7.1 河床および水面の境界条件

河床および水面ではせん断応力を境界条件として与える必要があるので，若干の説明が必要です．これは (49) 式右辺の $\Delta u$ に含まれることになります．$\Delta$ は (54) 式ですがこのうち,$\dfrac{1}{h^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ がこれに相当します

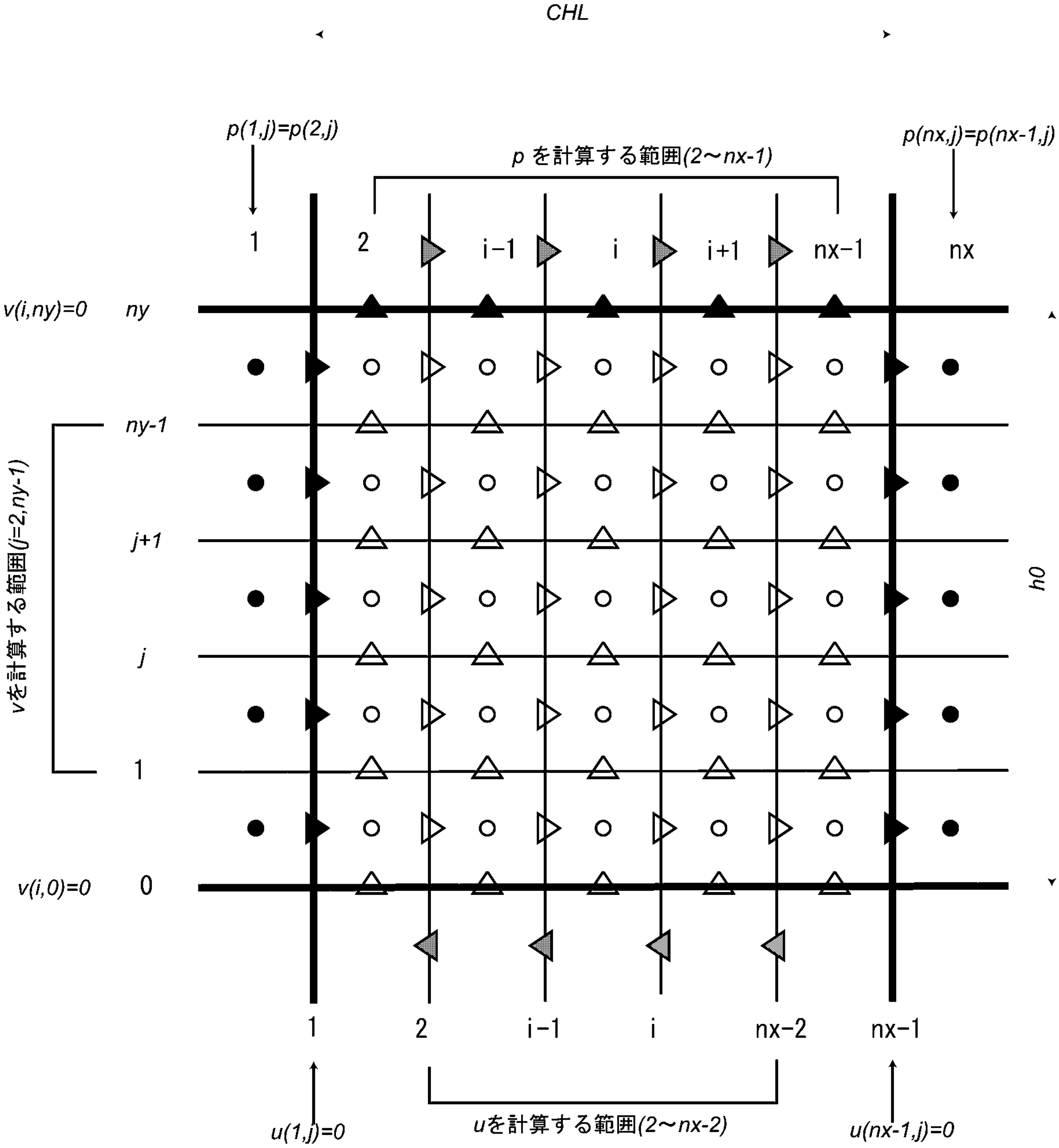
$$\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{h\Delta\xi}\left(\nu\frac{u(j+1)-u(j)}{h\Delta\xi} - \nu\frac{u(j)-u(j-1)}{h\Delta\xi}\right) \tag{87}$$

なので, 河床では

$$\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{1}{h\Delta\xi}\left(\nu\frac{u(j+1)-u(j)}{h\Delta\xi} - C_b u(j)|u(j)|\right) \tag{88}$$

水面では

$$\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{1}{h\Delta\xi}\left(\frac{W_x}{\rho} - \nu\frac{u(j)-u(j-1)}{h\Delta\xi}\right) \tag{89}$$


CHL
p(1,j)=p(2,j)
p を計算する範囲(2～nx-1)
p(nx,j)=p(nx-1,j)
1
2
i−1
i
i+1
nx−1
nx
v(i,ny)=0
ny
ny-1
vを計算する範囲(j=2,ny-1)
j+1
h0
j
1
v(i,0)=0
0
1
2
i−1
i
nx−2
nx−1
u(1,j)=0
uを計算する範囲(2～nx-2)
u(nx-1,j)=0

**図– 4 境界条件の模式図**