

# 水域管理工学特論テキスト

清水康行

北海道大学大学院工学研究科

水圏工学講座助教授

yasu@eng.hokudai.ac.jp

2000年4月

# 第1章 1次元の移流方程式

本文は、流体の計算を初心者でも出来るだけ分かりやすく解説したものです。計算方法は高精度のCIP法という方法を中心に説明されています。

## 1.1 1次元線形移流方程式

### 1.1.1 CIP法の基本概念

もっとも簡単な例として、次式の1次元移流方程式を用います。ここで、 $f$ は $x$ と $t$ の関数で $u$ は定数(一定値)です。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

この式を数値的に計算するという事は、要するに $f(x, t + \Delta t)$ をどう推定するかということです。通常の一次精度風上差分ではこれを $f(x - \Delta x, t)$ と $f(x, t)$ を使って推定します[図-1.1参照]。しかしながらこの方法では計算は安定であるが $f$ の分布形を正しく伝える

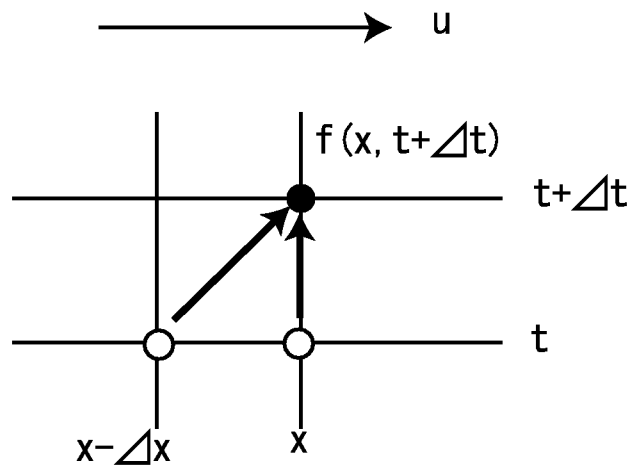


図 1.1: 風上差分における  $f(x, t + \Delta t)$  の推定法

ことが出来ないのは良く知られています。

そこで、少し発想の転換をします。そもそも(1.1)式の意味するところは変数 $f$ の分布形を速度 $u$ で伝えているのですから、 $\Delta t$ 時間の間には $f$ の分布形が伝わる距離は $u\Delta t$ のはずです。即ち、将来の $f = f(x, t + \Delta t)$ は現在の $f = f(x - u\Delta t, t)$ がそのまま伝わっているはずです[図-1.2参照]。

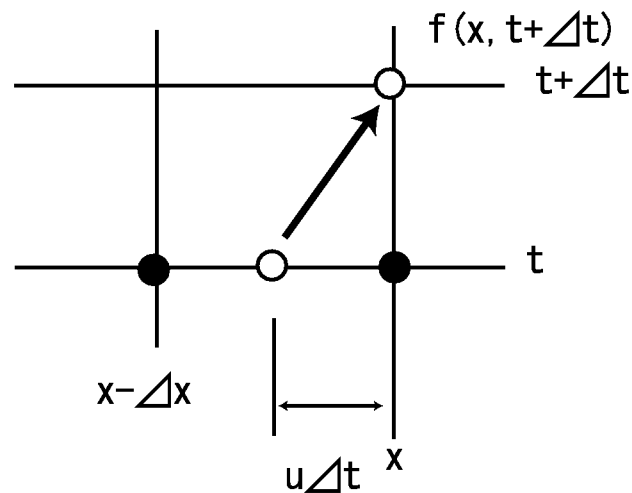


図 1.2:  $f(x, t + \Delta t)$  の伝わり方 (発想の転換)

将来の  $f(x, t + \Delta t)$  を推定する代わりに, 現在の  $f(x - u\Delta t, t)$  が推定できれば, その値をそのまま用いることが可能となるわけです. これを式で書けば,

$$f(x, t + \Delta t) \simeq f(x - u\Delta t, t) \quad (1.2)$$

となります.

### 1.1.2 分布形の推定方法

$f(x - u\Delta t, t)$  を推定する方法はいろいろあると思いますが, 問題は  $f$  は離散量として与えられているので,  $f$  の既知量は図-1.2 の●の点でありこの2つの●の点から○の  $f(x - u\Delta t, t)$  を推定する必要があるということになります. 最も単純には2点間を直線で結んで比例配分するという方法でしょうが, 2点の間で  $f$  が急激に変化している場合や, 1度増加して減少する場合などを考慮できるためには3次関数で表すのが妥当です.

図-1.3 に示すように  $x$  方向に  $i$ ,  $t$  方向に  $n$  で離散量を表し, A 点および B 点における  $f$  を  $f(i - 1, n)$ ,  $f(i, n)$  とします. AB 間における  $f$  の分布を3次関数で,  $X$  を B から A に向かった距離として表すと,

$$F = a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4 \quad (1.3)$$

となり,  $a_1 \sim a_4$  の4個のパラメータを含む3次式となります. これらのパラメータを決定するためには4つの条件が必要となります. このうち2つは,

$$\text{B 点で: } F_{(X=0)} = f(i, n) \quad (1.4)$$

$$\text{A 点で: } F_{(X=\Delta x)} = f(i - 1, n) \quad (1.5)$$

の条件で決まりますが, あと2つはどうしたら良いのでしょうか?

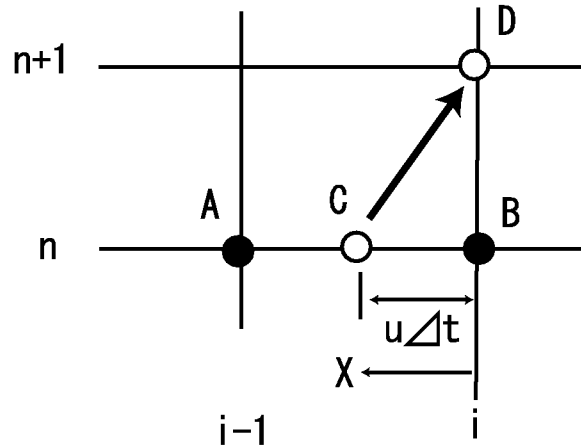


図 1.3: CIP 法の説明模式図

これもいろいろ考えられます (たとえば,  $f(i-2, n)$  や  $f(i+1, n)$  などを用いる) が CIP 法では,  $f$  の  $x$  軸方向の勾配を用います. つまり,

$$\text{B 点で: } \frac{\partial F}{\partial x (X=0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(i, n) \quad (1.6)$$

$$\text{A 点で: } \frac{\partial F}{\partial x (X=\Delta x)} = \frac{\partial f}{\partial x}(i-1, n) \quad (1.7)$$

(1.4)~(1.7) 式によって  $i$  と  $i-1$  の情報のみで AB 間の  $f$  の分布  $F$  が推定できることになり, これも CIP 法の大きなメリットの一つです.

(1.3) 式および (1.3) 式を  $x$  で偏微分した,

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 3a_1 X^2 + 2a_2 X + a_3 \quad (1.8)$$

に (1.4)~(1.7) 式の 4 つの条件を適用して,  $a_1 \sim a_4$  のパラメータを決定して  $F$  を求めれば良いのですが, これはちょっと面倒そうなので (1.4)~(1.7) 式の内, (1.4) 式と (1.6) 式を自動的に満たす

$$F(X) = [(aX + b)X + f_x(i, n)]X + f(i, n) \quad (1.9)$$

をあらためて用いることとします. ただし,

$$f_x(i, n) = \frac{\partial f}{\partial x}(i, n) \quad (1.10)$$

です.

(1.9) 式を書き直して,

$$F(X) = aX^3 + bX^2 + f_x(i, n)X + f(i, n) \quad (1.11)$$

となり, これを  $x$  で偏微分すると,

$$F_x(X) = 3aX^2 + 2bX + f_x(i, n) \quad (1.12)$$

となります. (1.11) 式と (1.12) 式はそれぞれ, (1.4) 式および (1.6) 式を自動的に満たしているのが分かると思います.

あとは, (1.5) 式の関係 (1.11) 式に, (1.7) 式 (1.12) 式に適用して,

$$a\Delta x^3 + b\Delta x^2 + f_x(i, n)\Delta x + f(i, n) = f(i-1, n) \quad (1.13)$$

$$3a\Delta x^2 + 2b\Delta x + f_x(i, n) = f_x(i-1, n) \quad (1.14)$$

したがって (1.13) 式および (1.14) 式から, (誘導は各自やってみてください)

$$a = \frac{[(f_x(i-1, n) + f_x(i, n))\Delta x + 2(f(i, n) - f(i-1, n))]}{\Delta x^3} \quad (1.15)$$

$$b = \frac{3[(f(i-1, n) - f(i, n))] - [f_x(i-1, n) + 2f_x(i, n)]\Delta x}{\Delta x^2} \quad (1.16)$$

が求まります.

### 1.1.3 本節のまとめ

以上をまとめると, (1.1) 式に CIP 法を適用して  $f(x, t + \Delta t)$  を求める手順は,

- (1.15), (1.16) で  $a, b$  を求める.
- (1.9) 式に  $a, b$  を代入して,  $X = u\Delta t$  とすることで,  $F(X = u\Delta t) = f(x - u\Delta t, t)$  を求める. ただし  $f_x$  は (1.11) 式で求める.
- (1.2) 式で  $f(x, t + \Delta t)$  を求める.

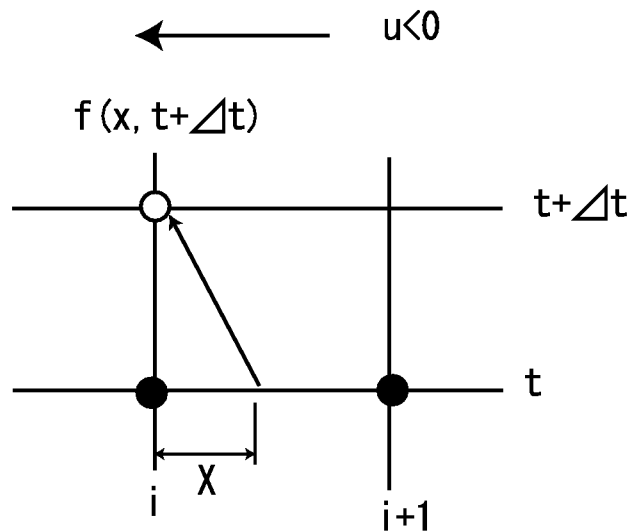
を  $i = 1 \sim N_i$  まで実行するということになります. なお, 本節で説明した 1次元移流方程式の数値計算プログラムは付録に `cip0.f` という名前で作成してあります.

## 1.2 1次元線形移流方程式 (流れの向きが変化する場合)

前節同様に 1次元の移流方程式を使用します.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.17)$$

ここで,  $f$  は  $x$  と  $t$  の関数で, 上記の式は関数  $f$  の分布が速度  $u$  で移動 (移流) することを表します. 前節では上記の式の  $u$  は定数で常に  $u > 0$  ということ为前提に話を進めてきましたが, 流体では  $u$  は流れの向きによって正だったり負だったり変化するので  $u < 0$  でも  $u > 0$  でも対応可能なアルゴリズムを用意する必要があります. そこで本節ではこれを考えてみます.

図 1.4:  $u < 0$  の場合の模式図

### 1.2.1 $u < 0$ の場合

上図のように  $u < 0$  の場合

$$X = -u\Delta t \quad (1.18)$$

とにおいて,  $i$  と  $i+1$  の間の  $f$  の分布を次式で表します [(1.9) 式参照]. この場合  $X > 0$  となります.

$$F(X) = [(aX + b)X + f_x(i)]X + f(i) \quad (1.19)$$

また,  $F(X)$  の微分量は,

$$F'(X) = 3aX^2 + bX + f_x(i) \quad (1.20)$$

ここで,

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.21)$$

のことで,  $F$  および  $F'$  は

$$X = 0 \text{ で } F(X) = f(i), \quad F'(X) = f_x(i) \quad (1.22)$$

$$X = \Delta x \text{ で } F(X) = f(i+1), \quad F'(X) = f'_x(i+1) \quad (1.23)$$

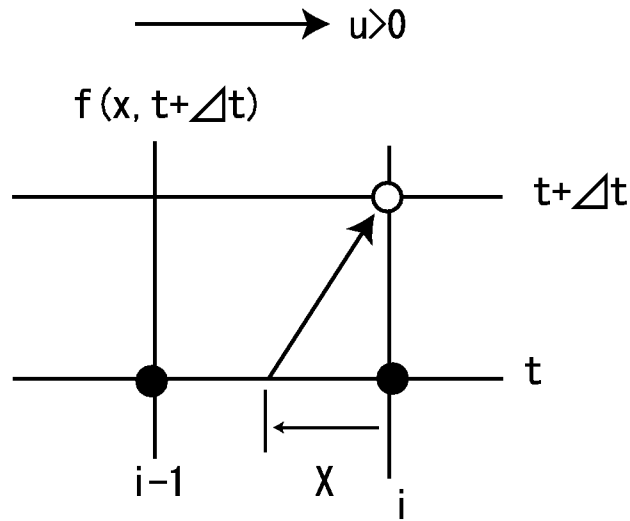
の条件より,

$$a = \frac{[(f_x(i+1) + f_x(i))\Delta x + 2[f(i) - f(i+1)])}{\Delta x^3} \quad (1.24)$$

$$b = \frac{3[(f(i+1) - f(i)) - [f_x(i+1) + 2f_x(i)]\Delta x]}{\Delta x^2} \quad (1.25)$$

が得られます. (1.24) 式および (1.25) 式の誘導は自分でやってみてください.

次に  $u > 0$  の場合を考えます.

図 1.5:  $u > 0$  の場合の模式図

### 1.2.2 $u > 0$ の場合

上図のように  $u > 0$  の場合も

$$X = -u\Delta t \quad (1.26)$$

と起きます. いままでは  $X = u\Delta t (> 0)$  としましたが, 今回は (1.26) 式のように  $X < 0$  とするように設定します. この理由はあとで分かりますが  $u < 0$  でも  $u > 0$  でも同じアルゴリズムを使用可能とするためのものです.  $u > 0$  の場合には,  $i$  と  $i-1$  の間の  $f$  の分布を次式で表します. これは (1.19) 式と全く同じ形です.

$$F(X) = [(aX + b)X + f_x(i)]X + f(i) \quad (1.27)$$

また,  $F(X)$  の微分量は,

$$F'(X) = 3aX^2 + 2bX + f_x(i) \quad (1.28)$$

で表されます.  $F$  および  $F'$  は

$$X = 0 \text{ で } F(X) = f(i), \quad F'(X) = f_x(i) \quad (1.29)$$

$$X = -\Delta x \text{ で } F(X) = f(i-1), \quad F'(X) = f'_x(i-1) \quad (1.30)$$

の条件より,

$$a = \frac{[(f_x(i-1) + f_x(i))\Delta x - 2[f(i) - f(i-1)])}{\Delta x^3} \quad (1.31)$$

$$b = \frac{3[(f(i-1) - f(i)) + [f_x(i-1) + 2f_x(i)]\Delta x]}{\Delta x^2} \quad (1.32)$$

が得られます. (1.31) 式および (1.32) 式の誘導も自分でやってみてください.

### 1.2.3 $u > 0$ でも $u < 0$ でも使えるようにするには?

(1.24),(1.25) 式が  $u < 0$  の場合で, (1.31),(1.32) が  $u > 0$  の場合ですが, これらのペアを比べてみると, 大変良く似ています.

数学で習ったかどうか分かりませんが, シグモイド関数というのがあります. これはある値が正ならば1を負ならば-1を与える関数で, 式で書くと

$$\text{sign}(Y) = 1, Y > 0 \quad (1.33)$$

$$\text{sign}(Y) = -1, Y < 0 \quad (1.34)$$

ということです. Fortran では”sign(1.0,u)” というふうに書きます (なぜか1.0が必要です). この関数を利用して,

$$i_m = i - \text{sign}(u) \quad (1.35)$$

という  $i_m$  を定義すると,

$$u > 0 \text{ のとき } i_m = i - 1 \quad (1.36)$$

$$u < 0 \text{ のとき } i_m = i + 1 \quad (1.37)$$

となります. したがって, (1.24),(1.25) 式または, (1.31),(1.32) 式の代わりに,

$$a = \frac{[(f_x(i_m) + f_x(i)) \Delta x \cdot \text{sign}(u) - 2[f(i) - f(i_m)]]}{\Delta x^3 \cdot \text{sign}(u)} \quad (1.38)$$

$$b = \frac{3[(f(i_m) - f(i)) + [f_x(i_m) + 2f_x(i)] \Delta x \cdot \text{sign}(u)]}{\Delta x^2} \quad (1.39)$$

で,  $u > 0$  も  $u < 0$  も両方の場合を同じ式で表せることとなります. これを用いずに,

```
if u>0 then
  .....
else
  .....
end if
```

とやっても1次元ならいいのですが, 3次元の場合  $u, v, w$  がありますので,

```
if u>0.and.v>0.and.w>0 then
  .....
  .....
else if u>0.and.v>0.and.w<0 then
  .....
  .....
```

となって”.....”のところは沢山の式を入れなければならないので結構大変になります. この場合, ここで説明した sign 関数が力を発揮します.

#### 演習問題

前節で添付した cip0.f を sign 関数を使って  $u > 0$  でも  $u < 0$  でも使えるように改良し, 実際に  $u > 0$  の場合と  $u < 0$  の場合の数値計算を行うこと.



### 1.3 source 項を含む方程式の分離解法

ここでは、CIP 法を用いる場合に不可欠となる分離解法の説明を行います。流体の方程式の多くは、(1.1) 式のように右辺がゼロの場合は稀で、多くは右辺に値を持ちます。これを一般的に次式で表します。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = G \quad (1.40)$$

$G$  は流れの運動方程式の場合、具体的には水面勾配、河床勾配、摩擦など様々外力項 (Source 項) となりますが、要するに移流項以外の成分のことです。(1.40) 式を便宜的に以下の2つの式に分けます。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.42)$$

$f(t)$  および  $f(t + \Delta t)$  をそれぞれ  $f^n$  および  $f^{n+1}$  とし、(1.40) 式で  $f^n \rightarrow f^{n+1}$  を計算するのを、(1.41) 式で一旦  $f^n \rightarrow \tilde{f}$  を求め、さらに (1.42) 式で  $\tilde{f} \rightarrow f^{n+1}$  を計算するというように2段階で計算します。これを分離解法と言います。このように分離することによって初めて (1.42) 式の形で CIP 法が使えるようになります。この2段階は Non-Advection Phase および、Advection Phase と呼ばれます。ここまでを整理すると以下ようになります。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G \quad \text{Non-advection Phase} \quad f^n \rightarrow \tilde{f} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{Advection Phase} \quad \tilde{f} \rightarrow f^{n+1} \quad (1.44)$$

CIP 法では、 $f$  の時間変化の他に (1.38) 式や (1.39) 式に表れる  $f_x$  即ち空間微分量も常に必要となるため、微分量も同時に、

$$\text{Non-Advection Phase で} \quad \frac{\partial f^n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \quad (1.45)$$

$$\text{Advection Phase で} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x} \quad (1.46)$$

というように変化すると考えます。

以上のように分離した方程式を用いてそれぞれの段階での計算方法を以下に示します。なお以下の説明においては移流項以外を差分表示する必要がある場合は、出来るだけ精度の高い中央差分を用いることとします。

#### 1.3.1 Non-Advection Phase (移流項以外の部分)

(1.43) 式より

$$\frac{\tilde{f} - f^n}{\Delta t} = G^n \quad (1.47)$$

ゆえに

$$\tilde{f} = f^n + G^n \Delta t \quad (1.48)$$

計算点を  $i$  とすると,

$$\tilde{f}(i) = f^n(i) + G^n(i) \Delta t \quad (1.49)$$

で Non-Advection Phase の  $f$  が更新されます ( $f^n \rightarrow \tilde{f}$ ). (1.48) 式の両辺を  $x$  で微分して,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \frac{\partial f^n}{\partial x} + \frac{\partial G^n}{\partial x} \Delta t \quad (1.50)$$

上式の  $\frac{\partial G^n}{\partial x}$  を中央差分で表せば,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \frac{\partial f^n}{\partial x} + \frac{G^n(i+1) - G^n(i-1)}{2\Delta x} \Delta t \quad (1.51)$$

ここで, (1.49) 式より,

$$G^n(i+1) = \frac{\tilde{f}(i+1) - f^n(i+1)}{\Delta t}, \quad G^n(i-1) = \frac{\tilde{f}(i-1) - f^n(i-1)}{\Delta t} \quad (1.52)$$

なので, (1.52) 式を (1.51) 式に代入して,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(i) = \frac{\partial f^n}{\partial x}(i) + \frac{1}{2\Delta t} [\tilde{f}(i+1) - f^n(i+1) - \tilde{f}(i-1) + f^n(i-1)] \quad (1.53)$$

となります. したがって, Non-Advection Phase における変数  $f$  およびその空間微分量  $\frac{\partial f}{\partial x}$  の更新は, (1.43) 式に相当する部分を (1.49) 式で, (1.45) 式に相当する部分を (1.53) 式で求めることができます.

### 1.3.2 Advection Phase (移流項の部分)

変数  $f$  の更新は (1.28) 式で行いますが, これは今までしてきた CIP 法をそのまま適用できます. 即ち (1.19) 式または (1.27) 式 (同じものですが) を適用して,

$$f(i)^{n+1} = F(X) = \left[ (aX + b)X + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(i) \right] X + \tilde{f}(i) \quad (1.54)$$

ただし,  $a$  および  $b$  はそれぞれ (1.38) 式および (1.39) 式で与えられます.

次に Advection Phase における空間微分量  $\frac{\partial f}{\partial x}$  をの更新法を考えて見ます. (1.46) 式に相当する部分です. (1.44) 式の両辺を  $x$  で偏微分します.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.55)$$

ここで  $\frac{\partial f}{\partial x}$  を  $f'$  と置いて第 2 項目を展開すると,

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + u \frac{\partial f'}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} f' \quad (1.56)$$

となります。いまここで考えているのは、Advection Phaseでの  $\frac{\partial f}{\partial x}$  の更新ですので、この式を用いて、 $\tilde{f}' \rightarrow f'^{m+1} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial f'^{m+1}}{\partial x} \right)$  を行えば良いことになります。

上式と (1.40) 式を比べて見て下さい。この式は (40) 式で  $f$  を  $f'$  に、 $G$  を  $-\frac{\partial u}{\partial x} f'$  としたもの的一致しています。そこで (1.40) 式でやったと同じように (1.56) 式に対して分離解法を適用します。即ち (1.56) 式を、

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + u \frac{\partial f'}{\partial x} = 0 \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} f' \quad (1.58)$$

のように分離して、 $\tilde{f}'$  と  $f'^{m+1}$  の間に中間量として  $\hat{f}'$  を考え、(1.57) 式で  $\tilde{f}' \rightarrow \hat{f}'$  を、(1.58) 式で  $\hat{f}' \rightarrow f'^{m+1}$  を計算することにします。

まず (1.57) 式ですが、これに再度 CIP 法を適用するのも一つの方法ですが、CIP 法で用いられる  $F(X)$  の空間微分量である (1.20) 式または (1.28) 式 (どちらも同じ形です) の  $F'(X)$  を用いる方が賢明のようです。即ち、

$$\hat{f}'(i) = \tilde{F}'(X) \quad (1.59)$$

として、

$$\hat{f}'(i) = 3aX^2 + 2bX + \tilde{f}'(i) \quad (1.60)$$

で計算します。(1.58) 式のほうは、

$$\frac{f'^{m+1}(i) - \hat{f}'(i)}{\Delta t} = -\frac{u(i+1) - u(i-1)}{2\Delta x} \hat{f}'(i) \quad (1.61)$$

と中央差分を適用し、これより

$$f'^{m+1}(i) = \hat{f}'(i) - \frac{u(i+1) - u(i-1)}{2\Delta x} \hat{f}'(i) \Delta t \quad (1.62)$$

で計算すれば良いことになります。

### 1.3.3 分離解法のまとめ

以上が (1.40) 式のような形の微分方程式の分離解法についての説明ですが、少しややこしくなったので、ここで下表にまとめておきます。

#### 演習問題

(1.40) 式で  $G$  が  $D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  のとき、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (1.63)$$

なる移流・拡散方程式となります。これを分離解法で CIP 法を適用して計算する場合のアルゴリズムについて述べよ。

表 1.1: 分離解法のまとめ

	$f$ の計算	$\frac{\partial f}{\partial x}$ の計算
Non-Advection Phase	$f^n \rightarrow \tilde{f}$ ; (1.49) 式	$\frac{\partial f^n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ ; (1.53) 式
Advection Phase	$\tilde{f} \rightarrow f^{n+1}$ ; (1.54) 式	$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x}$ ; (1.59), (1.62) 式

## 1.4 1次元の自由水面を有する流れの計算 (水路幅一定の場合)

### 1.4.1 基礎式

水路幅一定の長方形断面を有する水路流れの連続式および運動方程式を以下で表します。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2(uh)}{\partial x^2} - \frac{\tau_x}{\rho} \quad (1.65)$$

ここで,  $t$  は時間,  $x$  は流下方向距離,  $h$  は水深,  $u$  は流速,  $g$  は重力加速度,  $H$  は水位 ( $= \eta + h$ ),  $\eta$  は河床高,  $\varepsilon$  は渦動粘性係数,  $\tau_x$  は河床せん断力,  $\rho$  は水の密度です。

(1.65) 式の右辺は保存形と呼ばれる形で表現されており, 水面形が不連続の場合にも適用可能な形式となっています。水面形が連続な場合, 即ち,  $\frac{\partial h}{\partial x}$  や  $\frac{\partial u}{\partial x}$  が存在する場合には (1.65) 式の右辺は,

$$u \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial(uh)}{\partial x} + uh \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.66)$$

と展開可能となり, (1.64) 式の連続式を用いることにより, (1.65) 式は次式となります。ただし, 拡散項は近似的な表現です。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau_x}{\rho h} \quad (1.67)$$

以下の説明では, 運動方程式としてこの非保存形の (1.67) 式を用います。本来は, 非保存形では不連続な流れは扱えないはずなのですが, CIP 法を用いるとなぜか魔法のように (1.67) 式でも不連続な流れに対応可能なことが知られています。まあ, 難しい話はさて置いてとにかくこの式で以下の議論を進めます。

### 1.4.2 CIP 法の適用の準備 (分離解法)

議論をさらに単純化するために, 河床せん断力 (摩擦) が無視でき, 粘性も無視できる場合を考えます。基礎式は,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (1.68)$$

と

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.69)$$

ということになります. 式を見て分かると思いますが今までは (1.40) 式のように未知変数が  $f$  のみであったものが, 今回は  $h$  と  $u$  の2つになっているのが大きな違いです. 時間微分項から直感的に分かると思いますが, (1.68) 式で  $h$  を, (1.69) 式で  $u$  を計算します. (1.69) 式に (1.40) 式でやったように分離解法を適用します. 即ち,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (1.70)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.71)$$

と分離します. ただし,  $H = h + \eta$  の関係を用いてあります.

(1.69) 式で,  $u^n \rightarrow u^{n+1}$  を計算するのを, 中間に  $\tilde{u}$  を設け, (1.70) 式で  $u^n \rightarrow \tilde{u}$  を, (1.71) 式で  $\tilde{u} \rightarrow u^{n+1}$  を計算します. なお (1.70) 式には  $h$  が含まれているため, (1.70) 式を計算する際に, (1.68) 式を同時に満たす必要があります. これを  $h^n \rightarrow \tilde{h}$  と表しておきます. なお (1.71) 式のほうには  $h$  が含まれませんので, (1.68) 式と関連付けようがありませんので,  $h^{n+1}$  は (1.70) 式と (1.68) 式を連立して出てくる  $\tilde{h}$  をそのまま用いて,

$$h^{n+1} = \tilde{h} \quad (1.72)$$

とすることにします. 以上を整理しますと,

Non-Advection Phase	$u^n \rightarrow \tilde{u}$	$h^n \rightarrow \tilde{h}$	(1.70),(1.68) 式
Advection Phase	$\tilde{u} \rightarrow u^{n+1}$	$\tilde{h} \rightarrow h^{n+1}$	(1.71), (1.72) 式

ということになり, 以上で CIP 法を適用する準備が整いました.

### 1.4.3 Non-Advection Phase

(1.70) 式で  $u^n \rightarrow \tilde{u}$  を計算して同時に  $h^n \rightarrow \tilde{h}$  を行うので, (1.70) 式を以下のように表します.

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} = -g \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (1.73)$$

これより,

$$\tilde{u} = u^n - g\Delta t \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} - g\Delta t \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.74)$$

一方, (1.68) 式で  $h^n \rightarrow \tilde{h}$  を求めるので,

$$\frac{\tilde{h} - h^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}\tilde{h}) = 0 \quad (1.75)$$

を満たす必要があります. したがって, (1.74) 式と (1.75) 式を連立して得られる  $\tilde{h}$  および  $\tilde{u}$  を求める必要があります.

CIP法で流体の計算を行う場合は一般に  $u$  と  $h$  の計算点を交互に配置するスタックカード格子が用いられます. ここでは, 図-1.6 に示すような計算点の配置を採用することにします. 図-6 の計算点の配置を考慮して (1.74) 式を差分表示すると,

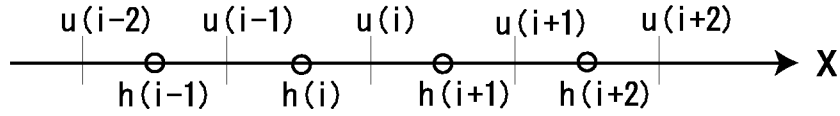


図 1.6: 計算格子の配置法

$$\tilde{u}(i) = u^n(i) - g\Delta t \frac{\tilde{h}(i+1) - \tilde{h}(i)}{\Delta x} - g\Delta t \frac{\eta(i+1) - \eta(i)}{\Delta x} \quad (1.76)$$

となり, これを (1.75) 式左辺第 2 項に代入するために,

$$\tilde{q} = \tilde{u}\tilde{h} \quad (1.77)$$

なる単位幅流量  $q$  を導入し ( $q$  計算点は  $u$  と同じとする), 格子点の配置を考慮して,

$$\tilde{q}(i) = \tilde{u}(i) \frac{\tilde{h}(i+1) + \tilde{h}(i)}{2} \quad (1.78)$$

および,  $q$  を用いた (1.75) 式の差分式

$$\tilde{h}(i) = h^n(i) + [\tilde{q}(i) - \tilde{q}(i-1)] \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (1.79)$$

より  $\tilde{h}$  を求めることが出来ます. ただし, (1.79) 式には右辺の  $\tilde{q}$  にも  $\tilde{h}$  が陰形式で含まれるため, 繰り返し計算が必要になります. この手順は図-1.7 に示すとおりです.

この繰り返し計算を通して得られる  $\tilde{h}(i)$  および  $\tilde{u}(i)$  が Non-Advection Phase の計算結果です.

Non-Advection Phase における  $\tilde{u}(i)$  が求まった段階で, Non-Advection Phase における  $\frac{\partial u}{\partial x}$  を求めておく必要があります. これは, 前記の (1.53) 式で  $f$  を  $u$  と置いた次式で求めることが出来ます.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i) = \frac{\partial u^n}{\partial x}(i) + \frac{1}{2\Delta t} [\tilde{u}(i+1) - u^n(i+1) - \tilde{u}(i-1) + u^n(i-1)] \quad (1.80)$$

#### 1.4.4 Advection Phase

Advection Phase においては (1.71) 式に直接 CIP 法を適用することが出来ます. 即ち, (1.54) 式で  $f$  を  $u$  と置いて次式で求めることが出来ます.

$$u(i)^{n+1} = U(X) = \left[ (aX + b)X + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i) \right] X + \tilde{u}(i) \quad (1.81)$$

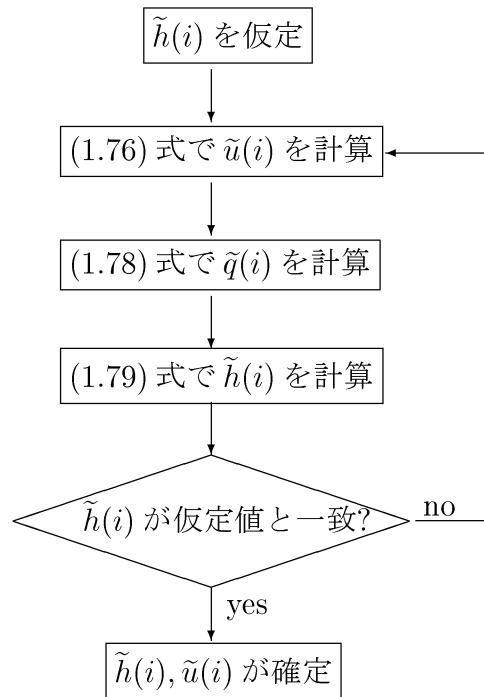


図 1.7: Non-Advection Phase における  $\tilde{h}(i)$  および  $\tilde{u}(i)$  の計算手順

ただし,  $\tilde{u}(i)$  および,  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i)$  はそれぞれ Non-Advection Phase における  $u$  および  $u$  の空間微分量であり, それぞれ, (1.76) 式および (1.80) 式で求めた値です. また,  $U(X)$  は Non-Advection Phase における  $u$  の空間分布関数であり, (1.54) 式を用いて, 次式で与えられます.

$$U(X) = \left[ (aX + b)X + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i) \right] X + \tilde{u}(i) \quad (1.82)$$

従って, Advection Phase における  $u$  は  $U(X)$  を用いて,

$$u(i)^{n+1} = U(X) \quad (1.83)$$

となり, Advection Phase における  $u$  の空間微分量は, (1.60) および (1.62) 式を用いて,

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(i) = 3aX^2 + 2bX + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i) \quad (1.84)$$

および

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(i) = \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(i) - \frac{u(i+1) - u(i-1)}{2\Delta x} \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(i) \Delta t \quad (1.85)$$

で求めることができます.

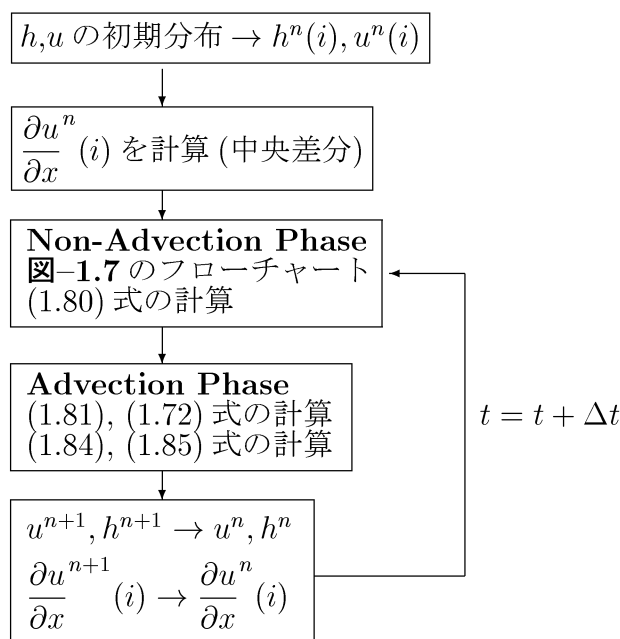


図 1.8: 1次元自由水面を有する流れの計算フローチャート

### 1.4.5 境界条件

本計算法においては  $u$ ,  $h$  の境界条件の他に CIP 法を用いるために  $\frac{\partial u}{\partial x}$  の境界条件も必要になります. 計算の対象としている現象に即した物理的な境界条件が必要となりますが, 最も単純な条件としては, 全ての変数に対して,

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (1.86)$$

という方法もあります. なお, 当然のことですが境界条件は Non-Advection Phase と Advection Phase の両方に適用する必要があります.

### 1.4.6 まとめ

以上の1次元自由水面を有する流れの計算をまとめると図-1.8のフローチャートとなります.

### 1.4.7 Appendix (摩擦項と拡散項を含む場合)

ここまでの説明では, 運動方程式として (1.67) 式の代わりに (1.69) 式を用いて摩擦項と拡散項を省略した形で解説を行って来ましたが, のような一般的な形の場合には Non-Advection



Phase の式 (1.70) の右辺に摩擦項と拡散項を付加した形となります。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau_x}{\rho h} \quad (1.87)$$

この式で Non-Advection Phase を一度に計算しても良いのですが、拡散項の部分をさらに分離して、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.88)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\tau_x}{\rho h} \quad (1.89)$$

と2段階で計算するほうが計算が簡単明瞭になります。この2段階で計算する  $u$  を (1.88) 式で  $u^n \rightarrow \bar{u}$ , (1.89) 式で  $\bar{u} \rightarrow \tilde{u}$  とすると Non-Advection Phase における  $u$  の計算は以下の式となります。

$$\bar{u}(i) = u^n(i) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [u^n(i+1) - 2u^n(i) + u^n(i-1)] \quad (1.90)$$

$$\tilde{u}(i) = \bar{u}(i) - g\Delta t \frac{\tilde{h}(i+1) - \tilde{h}(i)}{\Delta x} - g\Delta t \frac{\eta(i+1) - \eta(i)}{\Delta x} - \frac{\tau_x}{\rho h_m} \quad (1.91)$$

ただし、 $h_m$  は  $u$  の計算点の  $\tilde{h}$  であり、**図-1.6** に示した計算格子を考慮して次式で与えられます。

$$h_m = \frac{\tilde{h}(i) + \tilde{h}(i+1)}{2} \quad (1.92)$$

以上の摩擦項と拡散項を含む1次元自由水面を有する流れの計算のフォートランによるプログラム例を cip1d.f という名前で添付しますので各自試してみてください。

## 1.5 1次元自由水面流れ (河幅が変化する場合)

### 1.5.1 基礎式

一般断面の1次元非定常流れの連続式および運動方程式を以下で表します。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.93)$$

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{gA} \frac{\partial (Au^2)}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + I_f = 0 \quad (1.94)$$

ここで、 $t$  は時間、 $x$  は流下方向距離、 $A$  は断面積、 $Q$  は流量、 $g$  は重力加速度、 $u$  は断面平均流速、 $H$  は水位、 $I_f$  はエネルギー勾配です。(1.93) 式は上下流の流量の差が断面積の時間変化に等しいという連続の式です。(1.94) 式の第1項以外は定常流の運動量の式です。第1項は運動量の時間変化を表したものです。

上記の式は任意の断面形に適用可能な式ですが、最終的には1次元の河床変動計算に応用しますので以降、断面は矩形断面として扱うことにします。即ち、

$$A = Bh, \quad Q = Au = Bhu \quad (1.95)$$

の関係が成立するものとします。ただし、 $B$ は水路幅、 $h$ は水深で、 $H = h + \eta$ 、 $\eta$ は河床高です。

(1.95) 式の関係を用い、 $h$ は $x$ と $t$ の関数、 $B$ は $x$ のみの関数 ( $B$ は時間的には変化しない)であることを考慮すると(1.93)、(1.94)式は以下のように変形されます。

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uBh)}{\partial x} = 0 \quad (1.96)$$

$$\frac{\partial(uBh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2Bh)}{\partial x} = -gBh \frac{\partial H}{\partial x} - gBhI_f \quad (1.97)$$

(1.97) 式の左辺は保存形と呼ばれる形で表現されており、水面形が不連続の場合にも適用可能な形式となっています。水面形が連続な場合、即ち、 $\frac{\partial h}{\partial x}$  や  $\frac{\partial u}{\partial x}$  が存在する場合には(1.97)式の右辺は、

$$Bu \frac{\partial h}{\partial t} + Bh \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial(Buh)}{\partial x} + Buh \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.98)$$

と展開可能となり、(1.96)式の連続式を用いることにより、(1.97)式は次式となります。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} - gI_f \quad (1.99)$$

エネルギー勾配  $I_f$  は Manning 則を用い、広矩形断面を仮定して、

$$u = \frac{1}{n_m} h^{2/3} I_f^{1/2} \quad (1.100)$$

の関係を用いると、(1.99)式は以下のようになります。ただし  $n_m$  は Manning の粗度係数です。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{gn_m^2 u^2}{h^{4/3}} \quad (1.101)$$

以下の説明では、運動方程式としてこの非保存形の(1.101)式を用います。本来は、非保存形では不連続な流れは扱えないはずなのですが、CIP法を用いるとなぜか(1.101)式でも不連続な流れに対応可能なことは前の章でも説明したとおりです。

### 1.5.2 CIP法の適用の準備 (分離解法)

基礎式を再記しますと、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial(uBh)}{\partial x} = 0 \quad (1.102)$$

と

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial(h + \eta)}{\partial x} - \frac{gn_m^2 u^2}{h^{4/3}} \quad (1.103)$$

ということになります. (1.102) 式で  $h$  を, (1.103) 式で  $u$  を計算します. ここで, 分離解法を (1.103) 式に適用します. 即ち,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{gn_m^2 u^2}{h^{4/3}} \quad (1.104)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.105)$$

と分離します. ただし,  $H = h + \eta$  の関係を用いてあります.

(1.103) 式で,  $u^n \rightarrow u^{n+1}$  を計算するのを, 中間に  $\tilde{u}$  を設け, (1.104) 式で  $u^n \rightarrow \tilde{u}$  を, (1.105) 式で  $\tilde{u} \rightarrow u^{n+1}$  を計算します. なお (1.104) 式には  $h$  が含まれているため, (1.104) 式を計算する際に, (1.102) 式を同時に満たす必要があります. これを  $h^n \rightarrow \tilde{h}$  としておきます. なお (1.105) 式のほうには  $h$  が含まれませんので, (1.102) 式と関連付けようがありませんので,  $h^{n+1}$  は (1.104) 式と (1.102) 式を連立して出てくる  $\tilde{h}$  をそのまま用いて,

$$h^{n+1} = \tilde{h} \quad (1.106)$$

とすることにします. 以上を整理しますと,

Non-Advection Phase	$u^n \rightarrow \tilde{u}$	$h^n \rightarrow \tilde{h}$	(1.104), (1.102) 式
Advection Phase	$\tilde{u} \rightarrow u^{n+1}$	$\tilde{h} \rightarrow h^{n+1}$	(1.105), (1.106) 式

ということになり, 以上で CIP 法を適用する準備が整いました.

### 1.5.3 Non-Advection Phase

(1.104) 式で  $u^n \rightarrow \tilde{u}$  を計算して同時に  $h^n \rightarrow \tilde{h}$  を行うので, (1.104) 式を以下のように表します.

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} = -g \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{gn_m^2 \tilde{u}^2}{\tilde{h}^{4/3}} \quad (1.107)$$

これより,

$$\tilde{u} = u^n - g\Delta t \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} - g\Delta t \frac{\partial \eta}{\partial x} - g\Delta t \frac{gn_m^2 \tilde{u}^2}{\tilde{h}^{4/3}} \quad (1.108)$$

一方, (1.102) 式で  $h^n \rightarrow \tilde{h}$  を求めるので,

$$\frac{\tilde{h} - h^n}{\Delta t} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} \tilde{h} B) = 0 \quad (1.109)$$

を満たす必要があります. したがって, (1.108) 式と (1.109) 式を連立して得られる  $\tilde{h}$  および  $\tilde{u}$  を求める必要があります.

CIP 法で流体の計算を行う場合は  $u$  と  $h$  の計算点を交互に配置するスタカード格子が用いられます. 図-1.9 に示すような計算点の配置を採用することにします. 図-1.9 の計算

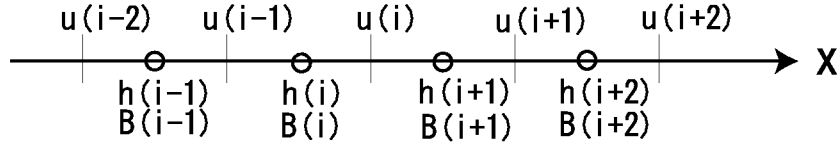


図 1.9: 計算格子の配置法

点の配置を考慮して (1.108) 式を差分表示すると,

$$\tilde{u}(i) = u^n(i) - g\Delta t \frac{\tilde{h}(i+1) - \tilde{h}(i)}{\Delta x} - g\Delta t \frac{\eta(i+1) - \eta(i)}{\Delta x} - g\Delta t \frac{n_m^2 \tilde{u}(i)^2}{\tilde{h}_p^{4/3}} \quad (1.110)$$

ただし,  $\tilde{h}_p = [\tilde{h}(i) + \tilde{h}(i+1)]/2$ , となり, これを (1.109) 式左辺第2項に代入するために,

$$\tilde{Q} = \tilde{u}\tilde{h}B \quad (1.111)$$

なる流量  $Q$  を定義し ( $Q$  計算点は  $u$  と同じとする), 格子点の配置を考慮して,

$$\tilde{Q}(i) = \tilde{u}(i) \frac{\tilde{h}(i+1) + \tilde{h}(i)}{2} \frac{B(i+1) + B(i)}{2} \quad (1.112)$$

および,  $Q$  を用いた (1.109) 式の差分式

$$\tilde{h}(i) = h^n(i) + \frac{1}{B(i)} [\tilde{Q}(i) - \tilde{Q}(i-1)] \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (1.113)$$

より  $\tilde{h}$  を求めることが出来ます. ただし, (1.113) 式には右辺の  $\tilde{Q}$  にも  $\tilde{h}$  が陰形式で含まれるため, 繰り返し計算が必要になります. この手順は図-1.10 に示すとおりです.

この繰り返し計算を通して得られる  $\tilde{h}(i)$  および  $\tilde{u}(i)$  が Non-Advection Phase の計算結果です.

Non-Advection Phase における  $\tilde{u}(i)$  が求まった段階で, Non-Advection Phase における  $\frac{\partial u}{\partial x}$  を求めておく必要があります. これは, (1.53) 式で  $f$  を  $u$  と置いた次式で求めることが出来ます.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i) = \frac{\partial u^n}{\partial x}(i) + \frac{1}{2\Delta t} [\tilde{u}(i+1) - u^n(i+1) - \tilde{u}(i-1) + u^n(i-1)] \quad (1.114)$$

#### 1.5.4 Advection Phase

Advection Phase においては (1.105) 式に直接 CIP 法を適用することが出来ます. これについては何度も説明しましたので結果のみ書きますと, 次式で求めることが出来ます.

$$u(i)^{n+1} = U(X) = \left[ (aX + b)X + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i) \right] X + \tilde{u}(i) \quad (1.115)$$

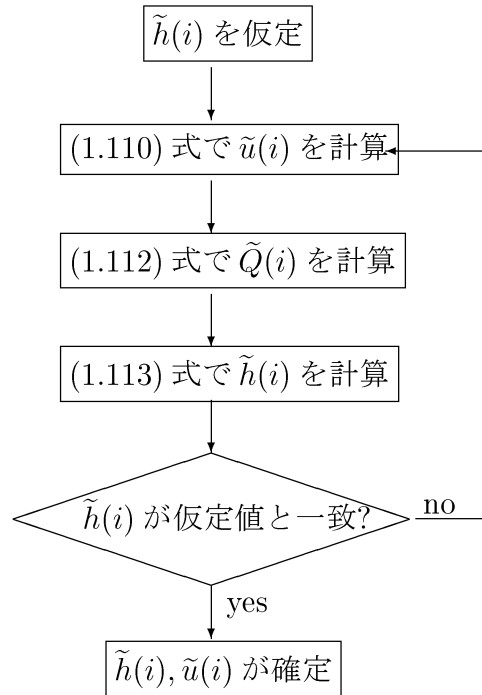


図 1.10: Non-Advection Phase における  $\tilde{h}(i)$  および  $\tilde{u}(i)$  の計算手順

ただし,  $\tilde{u}(i)$  および,  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i)$  はそれぞれ Non-Advection Phase における  $u$  および  $u$  の空間微分量であり, それぞれ, (1.110) 式および (1.113) 式で求めた値です. また,  $U(X)$  は Non-Advection Phase における  $u$  の空間分布関数であり, 次式で与えられます.

$$U(X) = \left[ (aX + b)X + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i) \right] X + \tilde{u}(i) \quad (1.116)$$

従って, Advection Phase における  $u$  は  $U(X)$  を用いて,

$$u(i)^{n+1} = U(X) \quad (1.117)$$

となります. Advection Phase における  $u$  の空間微分量も同様に,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x}(i) = 3aX^2 + 2bX + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(i) \quad (1.118)$$

および

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(i) = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x}(i) - \frac{u(i+1) - u(i-1)}{2\Delta x} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial x}(i) \Delta t \quad (1.119)$$

で求めることができます.

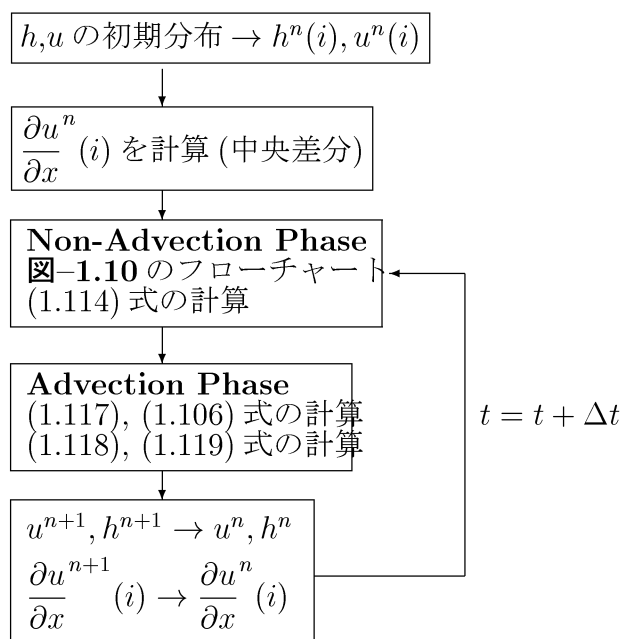


図 1.11: 1次元自由水面を有する流れの計算フローチャート

### 1.5.5 まとめ

以上の1次元自由水面を有する流れの計算をまとめると図-1.11のフローチャートとなります。

以上の1次元自由水面を有する流れの計算のフォートランによるプログラム例をcip1d\_b.fという名前で添付しますので内容を理解して下さい。