

第2章 2次元CIP法

本章では2次元CIP法を用いた流れの計算法の勉強を行います。なお本章で引用しているファイルは全て `files-2.lzh` というファイル内に圧縮して入っていますので各自解凍して使用願います。

2.1 2次元移流方程式

2.1.1 基礎式

2次元移流方程式を次式で表します。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

ここで、 t は時間、 x, y は直交座標軸、 f は移流される変数です。

2.1.2 移流項の更新

説明は簡単のためにまず $u < 0, v < 0$ の場合について行います。図-2.1 に示すように x, y 方向の計算点番号を i, j として時刻 t で $i, i+1, j, j+1$ の範囲にある点 (図中の白丸) が Δt 時間で図中の黒丸の点に移動すると考えます。1次元の計算で説明したのとまったく同じようにこの問題は図-1 の黒丸の点における f の分布形をいかに推定するかという問題に帰着します。即ち、

$$X = -u\Delta t, \quad Y = -v\Delta t \quad (2.2)$$

のときこの分布形 $F(X, Y)$ が推定できれば

$$f(i, j, t + \Delta t) = F(X, Y) \quad (2.3)$$

により f の時間更新ができます。

F の関数形は1次元問題のときは3次曲線としましたが、ここでは3次曲面とします。 $F(X, Y)$ は $X = 0, Y = 0$ で

$$F(X, Y) = f(i, j) \quad (2.4)$$

$$F_x(X, Y) = f_x(i, j) \quad (2.5)$$

$$F_y(X, Y) = f_y(i, j) \quad (2.6)$$

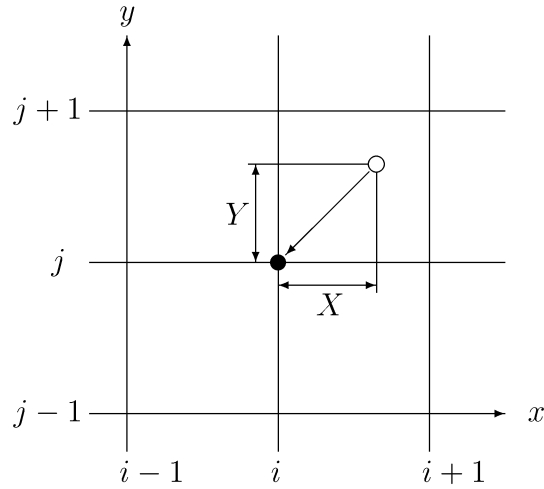


図- 2.1 計算平面上での f の推定

ただし,

$$F_x(X, Y) = \frac{\partial F}{\partial x}(X, Y) \quad , \quad F_y(X, Y) = \frac{\partial F}{\partial y}(X, Y)$$

$$f_x(i, j) = \frac{\partial f}{\partial x}(i, j) \quad , \quad f_y(i, j) = \frac{\partial f}{\partial y}(i, j)$$

を満たす必要があるので, $F(X, Y)$ を次式のように置きます.

$$F(X, Y) = [(a_1X + c_1Y + e_1)X + g_1Y + f_x(i, j)]X +$$

$$[(b_1Y + d_1X + f_1)Y + f_y(i, j)]Y + f(i, j) \quad (2.7)$$

この式は (4)~(6) 式を自動的に満たしています. 他の条件としては,

$$F(0, -\Delta y) = f(i, j + 1), \quad F(-\Delta x, 0) = f(i + 1, j), \quad F(-\Delta x, -\Delta y) = f(i + 1, j + 1)$$

$$F_x(0, -\Delta y) = f_x(i, j + 1), \quad F_x(-\Delta x, 0) = f_x(i + 1, j), \quad F_x(-\Delta x, -\Delta y) = f_x(i + 1, j + 1)$$

$$F_y(0, -\Delta y) = f_y(i, j + 1), \quad F_y(-\Delta x, 0) = f_y(i + 1, j) \quad (2.8)$$

を満たす必要があります. これらの関係を用いることにより, 式 (7) 中の係数は以下のようになります.

$$a_1 = \frac{[f_x(i + 1, j) + f_x(i, j)] \Delta x + 2[f(i, j) - f(i + 1, j)]}{\Delta x^3} \quad (2.9)$$

$$b_1 = \frac{[f_y(i, j + 1) + f_y(i, j)] \Delta y + 2[f(i, j) - f(i, j + 1)]}{\Delta y^3} \quad (2.10)$$

$$c_1 = \frac{f(i, j) - f(i, j + 1) - f(i + 1, j) + f(i + 1, j + 1) - [f_x(i, j + 1) - f_x(i, j)] \Delta x}{\Delta x^2 \Delta y} \quad (2.11)$$

$$d_1 = \frac{f(i, j) - f(i, j+1) - f(i+1, j) + f(i+1, j+1) - [f_y(i+1, j) - f_y(i, j)] \Delta y}{\Delta x \Delta y^2} \quad (2.12)$$

$$e_1 = \frac{3[f(i+1, j) - f(i, j)] - [f_x(i+1, j) + 2f_x(i, j)] \Delta x}{\Delta x^2} \quad (2.13)$$

$$f_1 = \frac{3[f(i, j+1) - f(i, j)] - [f_y(i, j+1) + 2f_y(i, j)] \Delta y}{\Delta y^2} \quad (2.14)$$

$$g_1 = \frac{-f_y(i+1, j) + f_y(i, j) - c_1 \Delta x^2}{\Delta x} \quad (2.15)$$

演習問題

(2.9) 式～(2.15) 式の誘導を自分で行って、正しいかどうか確かめて下さい。

2.1.3 移流量の更新 (一般化)

以上の説明は $u < 0, v < 0$ の場合でしたが、実際には u, v の符号の組み合わせによって8通りの組み合わせがありますが、これをすべて定式化してプログラミングするのは非常に煩雑です。そこで1次元でやったようにシグモイド関数を導入して表現することにします。

$$i_s = \text{sign}(u), \quad j_s = \text{sign}(v) \quad (2.16)$$

$$i_m = i - i_s \quad j_m = j - j_s \quad (2.17)$$

式の誘導は省略して結果のみを述べますと、 $F(X, Y)$ は (7) 式と全く同じで、

$$F(X, Y) = [(a_1 X + c_1 Y + e_1) X + g_1 Y + f_x(i, j)] X + \\ [(b_1 Y + d_1 X + f_1) Y + f_y(i, j)] Y + f(i, j) \quad (2.18)$$

ただし、係数 $a_1 \sim g_1$ は i_s, j_s, i_m, j_m を用いることにより、 u, v の符号に関係なく以下のよう表現されます。

$$a_1 = \frac{i_s [f_x(i_m, j) + f_x(i, j)] \Delta x - 2 [f(i, j) - f(i_m, j)]}{i_s \Delta x^3} \quad (2.19)$$

$$b_1 = \frac{j_s [f_y(i, j_m) + f_y(i, j)] \Delta y - 2 [f(i, j) - f(i, j_m)]}{j_s \Delta y^3} \quad (2.20)$$

$$c_1 = \frac{f(i, j) - f(i, j_m) - f(i_m, j) + f(i_m, j_m) - i_s [f_x(i, j_m) - f_x(i, j)] \Delta x}{j_s \Delta x^2 \Delta y} \quad (2.21)$$

$$d_1 = \frac{f(i, j) - f(i, j_m) - f(i_m, j) + f(i_m, j_m) - j_s [f_y(i_m, j) - f_y(i, j)] \Delta y}{i_s \Delta x \Delta y^2} \quad (2.22)$$

$$e_1 = \frac{3 [f(i_m, j) - f(i, j)] + i_s [f_x(i_m, j) + 2f_x(i, j)] \Delta x}{\Delta x^2} \quad (2.23)$$

$$f_1 = \frac{3 [f(i, j_m) - f(i, j)] + j_s [f_y(i, j_m) + 2f_y(i, j)] \Delta y}{\Delta y^2} \quad (2.24)$$

$$g_1 = \frac{f_y(i_m, j) - f_y(i, j) + c_1 \Delta x^2}{i_s \Delta x} \quad (2.25)$$

演習問題

(2.19) 式～(2.25) 式の誘導を自分で行って、正しいかどうか確かめて下さい。

2.1.4 微分量の更新

CIP 法では変数 f の他にもその微分量 f_x, f_y も時々刻々更新して行く必要があります。そこで (2.1) 式の両辺をまず x で偏微分します。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + u \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.26)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ を f_x とすると、

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} + v \frac{\partial f_x}{\partial y} = - \left(f_x \frac{\partial u}{\partial x} + f_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.27)$$

となりまして、左辺は f_x に関する 2 次元の移流方程式になっていることが分かります。従って、前述の 2 次元の CIP 法をそのまま適用すれば良いことになります。また、右辺に関してはもし u, v が定数であればゼロとなりますが、変数の場合には、1 次元の CIP 法で説明した「Source 項を含む計算法」を適用して分離解放で計算することになります。なお右辺の差分形式は中央差分で行けます。

同様に、(1) 式を y で偏微分して $\frac{\partial f}{\partial y}$ を f_y とすると、

$$\frac{\partial f_y}{\partial t} + u \frac{\partial f_y}{\partial x} + v \frac{\partial f_y}{\partial y} = - \left(f_x \frac{\partial u}{\partial y} + f_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.28)$$

が得られ (2.27) 式と同様な形となり、左辺の移流項の部分は CIP 法で、右辺の Source 項の部分は中央差分で計算可能となります。

例題

2 次元移流方程式を CIP 法で計算するためのサブルーチンを作ってみて下さい。解答例は basic というフォルダにある cip2d.f です。

2.2 自由水面を有する流れの 2 次元計算法**2.2.1 基礎式**

2 次元非定常流れの連続式および運動方程式を以下で表します。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t \frac{\partial(uh)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial(uh)}{\partial y} \right] \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial y} = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t \frac{\partial(vh)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial(vh)}{\partial y} \right] \quad (2.31)$$

ただし, x, y はそれぞれ互いに直交する平面上の座標軸, u, v は x, y 方向の水深平均流速, t は時間, ρ は水の密度, h は水深, H は水位 ($= \eta + h$), η は河床高, g は重力加速度, τ_x, τ_y はそれぞれ x および y 方向の河床せん断力, ν_t は水深平均流に関する渦動粘性係数です. 抵抗則に Manning 則を適用すると, τ_x, τ_y は次式で表されます. [補遺参照]

$$\tau_x = \frac{\rho g n_m^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}, \quad \tau_y = \frac{\rho g n_m^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (2.32)$$

ただし n_m は Manning の粗度係数です. 渦動粘性係数は簡単のためにひとまず定数として扱います.

1次元の自由水面流れの計算法で説明しましたように, (2.30), (2.31) 式は保存形と呼ばれる形式で表されています. これに今までやってきた CIP 法を適用するわけですが, このままの形式では CIP 法は使えません. そこで1次元問題の時にもやったように以下の非保存形に変形します.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{g n_m^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} + \nu_t \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{g n_m^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} + \nu_t \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2.34)$$

演習問題 (2.33)~(2.34) 式を自分で誘導してみてください.

(2.29), (2.33), (2.34) 式が今後用いる基礎式ということになります.

2.2.2 CIP 法適用の準備 (分離解法)

基礎式から分かると思いますが, (2.29) 式から h を, (2.33) 式および (2.34) 式からそれぞれ u と v を求めます. H は河床高 η が与えられた場合 h から $H = \eta + h$ で対応しますので h の代わりに H を未知量と考えても同じことです.

1次元の時と同じように (2.33) 式および (2.34) 式に分離解法を適用します. ほとんど同じ形なので (2.33) 式の場合のみ説明します. (2.33) 式に $H = \eta + h$ の関係を用いて再記しておきます.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{g n_m^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} + \nu_t \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.35)$$

なお今回は拡散項も含むため, 移流項に関する部分, 圧力項と摩擦項に関する部分, および拡散項に関する部分の3つに分離することとします.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{g n_m^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu_t \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.38)$$

n を時間ステップとして, (2.35) 式で, $u^n \rightarrow u^{n+1}$ の計算をする代わりに, 中間に \bar{u} と \tilde{u} を設けて (2.36) 式で $u^n \rightarrow \bar{u}$ を, (2.37) 式で $\bar{u} \rightarrow \tilde{u}$ を, (2.38) 式で $\tilde{u} \rightarrow u^{n+1}$ を計算することにします. なお, (2.36) 式には h が含まれているため (2.29) 式の連続式も同時に満たす必要があります. これを $h^n \rightarrow \bar{h}$ と表しておきます. これに対して (2.37) 式, (2.38) 式には h が含まれていませんので, h^{n+1} はこの \bar{h} をそのまま用いることとします. 即ち,

$$h^{n+1} = \bar{h} \quad (2.39)$$

ということです. v についてもまったく同様です. v に関する運動方程式も以下のように分離して計算します.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{gn_m^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu_t \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.42)$$

以上を整理すると,

Non-Advection Phase I	$u^n \rightarrow \bar{u}$	$v^n \rightarrow \bar{v}$	$h^n \rightarrow \bar{h} \rightarrow h^{n+1}$	(2.36),(2.40),(2.29),(2.39) 式
Non-Advection Phase II	$\bar{u} \rightarrow \tilde{u}$	$\bar{v} \rightarrow \tilde{v}$		(2.37),(2.41) 式
Advection Phase	$\tilde{u} \rightarrow u^{n+1}$	$\tilde{v} \rightarrow v^{n+1}$		(2.38),(2.42) 式

ということになり, 以上で CIP 法を適用する準備が整いました.

2.2.3 Non Advection Phase I

(2.36) 式で $u^n \rightarrow \bar{u}$ を, (2.40) 式で $v^n \rightarrow \bar{v}$ を計算するので (2.36) 式および (2.40) 式を以下のように表しておきます.

$$\frac{\bar{u} - u^n}{\Delta t} = -g \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{gn_m^2 \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{\bar{h}^{4/3}} \quad (2.43)$$

$$\frac{\bar{v} - v^n}{\Delta t} = -g \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{gn_m^2 \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{\bar{h}^{4/3}} \quad (2.44)$$

これより,

$$\bar{u} = u^n - g\Delta t \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} - g\Delta t \frac{\partial \eta}{\partial x} - g\Delta t \frac{gn_m^2 \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{\bar{h}^{4/3}} \quad (2.45)$$

$$\bar{v} = v^n - g\Delta t \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} - g\Delta t \frac{\partial \eta}{\partial y} - g\Delta t \frac{gn_m^2 \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{\bar{h}^{4/3}} \quad (2.46)$$

一方, (2.29) 式で $h^n \rightarrow \bar{h}$ を求めるので,

$$\frac{\bar{h} - h^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{h}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}\bar{h}) = 0 \quad (2.47)$$

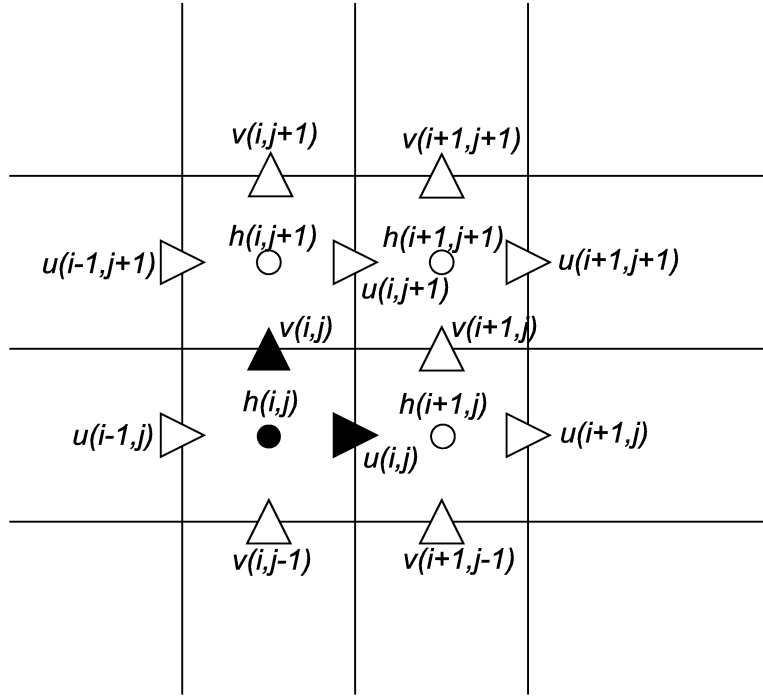


図- 2.2 計算格子の配置法

を満たす必要があります。従って、(2.45)~(2.47) を連立して得られる \bar{h} , \bar{u} および \bar{v} を求める必要があります。

CIP 法で流体の計算を行う場合は一般に u, v と h の計算点を交互に配置するスタックカード格子が用いられます。ここでは、図-2.2 に示すような計算点の配置を採用することになります。

図-2.2 の計算点の配置を考慮して (2.45) 式を差分表示すると、

$$\begin{aligned} \bar{u}(i, j) = & u^n(i, j) - g\Delta t \frac{\bar{h}(i+1, j) - \bar{h}(i, j)}{\Delta x} - g\Delta t \frac{\eta(i+1, j) - \eta(i, j)}{\Delta x} \\ & - g\Delta t \frac{n_m^2 \bar{u}(i, j) \sqrt{\bar{u}(i, j)^2 + \bar{v}_{up}^2}}{\bar{h}_{up}^{4/3}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

ここで、下付き添え字 $_{up}$ は u の計算点における値であることを表し、図-2.2 の計算点の配置によれば、

$$\bar{v}_{up} = \frac{\bar{v}(i, j) + \bar{v}(i, j-1) + \bar{v}(i+1, j) + \bar{v}(i+1, j-1)}{4} \quad (2.49)$$

$$\bar{h}_{up} = \frac{\bar{h}(i, j) + \bar{h}(i+1, j)}{2} \quad (2.50)$$

となります。同様に (2.46) 式を差分表示すると、

$$\bar{v}(i, j) = v^n(i, j) - g\Delta t \frac{\bar{h}(i, j+1) - \bar{h}(i, j)}{\Delta y} - g\Delta t \frac{\eta(i, j+1) - \eta(i, j)}{\Delta y}$$

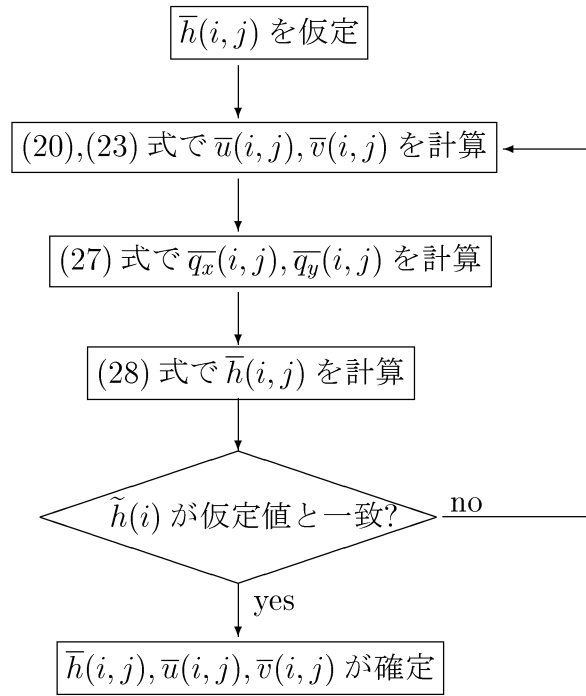


図- 2.3 Non-Advection Phase I における $\bar{h}(i, j)$, $\bar{u}(i, j)$ および $\bar{v}(i, j)$ の計算手順

$$-g\Delta t \frac{n_m^2 \bar{v}(i, j) \sqrt{\bar{u}_{vp}^2 + \bar{v}(i, j)^2}}{\bar{h}_{vp}^{4/3}} \quad (2.51)$$

となります。下付き添え字 $_{vp}$ は u の計算点における値であることを表し、

$$\bar{u}_{vp} = \frac{\bar{u}(i, j) + \bar{u}(i-1, j) + \bar{u}(i, j+1) + \bar{u}(i-1, j+1)}{4} \quad (2.52)$$

$$\bar{h}_{vp} = \frac{\bar{h}(i, j) + \bar{h}(i, j+1)}{2} \quad (2.53)$$

で表されます。(2.48) 式および (2.51) 式を (2.47) 式の左辺第 2 項および第 3 項に代入するために、

$$\bar{q}_u = \bar{u}\bar{h}, \quad \bar{q}_v = \bar{v}\bar{h} \quad (2.54)$$

を定義し (q_u および q_v の計算点はそれぞれ u および v と同じとする), 計算格子点の配置を考慮して、

$$\bar{q}_x(i, j) = \bar{u}(i, j) \frac{\bar{h}(i+1, j) + \bar{h}(i, j)}{2}, \quad \bar{q}_y(i, j) = \bar{v}(i, j) \frac{\bar{h}(i, j+1) + \bar{h}(i, j)}{2} \quad (2.55)$$

および, q_x, q_y を用いた (2.47) 式の差分式

$$\bar{h}(i) = h^n(i, j) + \left[\frac{\bar{q}_x(i, j) - \bar{q}_x(i-1, j)}{\Delta x} + \frac{\bar{q}_y(i, j) - \bar{q}_y(i, j-1)}{\Delta y} \right] \Delta t \quad (2.56)$$

より \bar{h} を求めることが出来ます. ただし, (2.56) 式には右辺の \bar{q}_x, \bar{q}_y にも \bar{h} が陰的な形で含まれるため, 繰り返し計算が必要になります. この手順は図-2.3 に示すとおりです.

この繰り返し計算を通して得られる $\bar{h}(i), \bar{u}(i, j)$ および $\bar{v}(i, j)$ が Non-Advection Phase I の計算結果です.

Non-Advection Phase I における $\bar{u}(i, j)$ と $\bar{v}(i, j)$ が求めた段階で, Non-Advection Phase I における $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ および $\frac{\partial v}{\partial y}$ すなわち, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ および $\frac{\partial v}{\partial y}$ を求めておく必要があります. これは1次元の時にやったのと全く同様に以下の式で計算できます.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(i, j) = \frac{\partial u^n}{\partial x}(i, j) + \frac{1}{2\Delta t} [\bar{u}(i+1, j) - u^n(i+1, j) - \bar{u}(i-1, j) + u^n(i-1, j)] \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(i, j) = \frac{\partial u^n}{\partial y}(i, j) + \frac{1}{2\Delta t} [\bar{u}(i, j+1) - u^n(i, j+1) - \bar{u}(i, j-1) + u^n(i, j-1)] \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(i, j) = \frac{\partial v^n}{\partial x}(i, j) + \frac{1}{2\Delta t} [\bar{v}(i+1, j) - v^n(i+1, j) - \bar{v}(i-1, j) + v^n(i-1, j)] \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}(i, j) = \frac{\partial v^n}{\partial y}(i, j) + \frac{1}{2\Delta t} [\bar{v}(i, j+1) - v^n(i, j+1) - \bar{v}(i, j-1) + v^n(i, j-1)] \quad (2.60)$$

2.2.4 Non Advection Phase II

ここでは拡散項の計算を行います. 拡散項は (2.37) 式および (2.41) 式を用いて, $\bar{u} \rightarrow \tilde{u}$ および $\bar{v} \rightarrow \tilde{v}$ の計算を行います. 拡散項は単純に中央差分が適用できますので, (2.37) 式および (2.41) 式の差分表示は以下のようになります.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(i, j) = \bar{u}(i, j) + \Delta t \nu_t & \left[\frac{\bar{u}(i+1, j) - 2\bar{u}(i, j) + \bar{u}(i-1, j)}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\bar{u}(i, j+1) - 2\bar{u}(i, j) + \bar{u}(i, j-1)}{\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(i, j) = \bar{v}(i, j) + \Delta t \nu_t & \left[\frac{\bar{v}(i+1, j) - 2\bar{v}(i, j) + \bar{v}(i-1, j)}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\bar{v}(i, j+1) - 2\bar{v}(i, j) + \bar{v}(i, j-1)}{\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.2.5 Advection Phase

Advection Phase で計算する式は (2.38) 式と (2.42) 式です. これは, 前節でやった2次元の移流方程式そのものです. 基礎式 (2.1) 式で, f を u としたのが (2.38) 式で, f を v としたのが (2.42) 式ですので全節の内容をそのまま適用できます. ただし, 今回は u と v の計算点の配置方法が異なりますのでこの点だけ注意する必要があります. たとえば, (2.38) 式に CIP 法を適用する場合, 左辺第3項に現れる v は u の計算点のものを使う必要があります, (2.49) 式のような変換が必要になります. 同様に (2.14) 式の左辺第2項に現れる u は v の計算点の u を使用する必要があります, (2.52) 式のような変換が必要になります. これらを考慮して, Advection Phase の計算は以下のように式で行われます.

Advection Phase の u

$$u(i, j)^{n+1} = \left[(a_1 X + c_1 Y + e_1) X + g_1 Y + \overline{\frac{\partial u}{\partial x}}(i, j) \right] X + \left[(b_1 Y + d_1 X + f_1) Y + \overline{\frac{\partial u}{\partial y}}(i, j) \right] Y + \tilde{u}(i, j) \quad (2.63)$$

ただし,

$$X = -\tilde{u}(i, j)\Delta t, \quad Y = -\widetilde{v_{up}}(i, j)\Delta t \quad (2.64)$$

$$\widetilde{v_{up}} = \frac{\tilde{v}(i, j) + \tilde{v}(i, j-1) + \tilde{v}(i+1, j) + \tilde{v}(i+1, j-1)}{4} \quad (2.65)$$

なお (2.63) 式中の $a_1 \sim g_1$ は前節の (2.19) ~ (2.25) 式で f を \tilde{u} としたものです.

Advection Phase の v

$$v(i, j)^{n+1} = \left[(a_1 X + c_1 Y + e_1) X + g_1 Y + \overline{\frac{\partial v}{\partial x}}(i, j) \right] X + \left[(b_1 Y + d_1 X + f_1) Y + \overline{\frac{\partial v}{\partial y}}(i, j) \right] Y + \tilde{v}(i, j) \quad (2.66)$$

ただし,

$$X = -\widetilde{u_{vp}}(i, j)\Delta t, \quad Y = -\tilde{v}(i, j)\Delta t \quad (2.67)$$

$$\widetilde{u_{vp}} = \frac{\tilde{u}(i, j) + \tilde{u}(i-1, j) + \tilde{u}(i, j+1) + \tilde{u}(i-1, j+1)}{4} \quad (2.68)$$

なお (2.66) 式中の $a_1 \sim g_1$ は (2.19) ~ (2.25) 式で f を \tilde{u} としたものです.

Advection Phase における微分量の更新

前節の (2.27) 式および (2.28) 式を用いた微分量の更新が必要です. 確認のためにこれらの式を再記しておきます.

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} + v \frac{\partial f_x}{\partial y} = - \left(f_x \frac{\partial u}{\partial x} + f_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial t} + u \frac{\partial f_y}{\partial x} + v \frac{\partial f_y}{\partial y} = - \left(f_x \frac{\partial u}{\partial y} + f_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.70)$$

まず, (2.69) 式で f が u の場合を考えます. 左辺には CIP 法を適用できますので, 2段階に分けて, CIP による移流部分とそれ以外に分けて計算します. たとえば, u の x 微分に関する更新を,

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} \longrightarrow \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}} \longrightarrow \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \quad (2.71)$$

と表示することにしますと, 移流部分は,

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(i, j) = [3a_1X + 2(c_1Y + e_1)]X + (d_1Y + g_1)Y + \overline{\frac{\partial u}{\partial x}}(i, j) \quad (2.72)$$

それ以外の部分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(i, j) &= \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(i, j) \\ &- \left[\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(i, j) \frac{\tilde{u}(i+1, j) - \tilde{u}(i-1, j)}{2\Delta x} + \widehat{\frac{\partial u}{\partial y}}(i, j) \frac{\widetilde{v_{up}}(i+1, j) - \widetilde{v_{up}}(i-1, j)}{2\Delta x} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (2.73)$$

によって計算することが出来ます (a_1, c_1, e_1, d_1, g_1 は前節を参照願います). 同様に, u の y に関する微分量の更新は,

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial y}}(i, j) = [3b_1Y + 2(d_1X + f_1)]Y + (c_1X + g_1)X + \overline{\frac{\partial u}{\partial y}}(i, j) \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}(i, j) &= \widehat{\frac{\partial u}{\partial y}}(i, j) \\ &- \left[\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(i, j) \frac{\tilde{u}(i, j+1) - \tilde{u}(i, j-1)}{2\Delta y} + \widehat{\frac{\partial u}{\partial y}}(i, j) \frac{\widetilde{v_{up}}(i, j+1) - \widetilde{v_{up}}(i, j-1)}{2\Delta y} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (2.75)$$

によって計算することが出来ます. なお, 最近発見したのですが, (2.73) 式および (2.75) 式の右辺第2項と第3項の $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}$ および $\widehat{\frac{\partial u}{\partial y}}$ は, それぞれ直前に (2.72) 式や (2.74) 式で計算されるものを用いるよりは, 別途, \tilde{u} を用いて計算し直したほうが計算の安定性が高まるということが分かりました. この場合, (2.73) 式と (2.75) 式の代わりに以下の式を用いるということになります.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(i, j) &= \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(i, j) - \left\{ \frac{[\tilde{u}(i+1, j) - \tilde{u}(i-1, j)] [\tilde{u}(i+1, j) - \tilde{u}(i-1, j)]}{2\Delta x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[\tilde{u}(i, j+1) - \tilde{u}(i, j-1)] [\widetilde{v_{up}}(i+1, j) - \widetilde{v_{up}}(i-1, j)]}{2\Delta x} \right\} \Delta t \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}(i, j) &= \widehat{\frac{\partial u}{\partial y}}(i, j) - \left\{ \frac{[\tilde{u}(i+1, j) - \tilde{u}(i-1, j)] [\tilde{u}(i, j+1) - \tilde{u}(i, j-1)]}{2\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[\tilde{u}(i, j+1) - \tilde{u}(i, j-1)] [\widetilde{v_{up}}(i, j+1) - \widetilde{v_{up}}(i, j-1)]}{2\Delta y} \right\} \Delta t \end{aligned} \quad (2.77)$$

演習問題 Advection Phase における $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ の計算法を説明してください.

2.3 2次元自由水面流れの計算例(1)

せっかく CIP 法を使うのですから, 単純な流れの計算ではつまらないと思いますので, 複断面で低水路に落差のある流れの計算を行います. 具体的には [清水康行, 藤田睦博, 平野道夫: 連続床止め工を有する複断面河道における流れと河床変動の計算, 水工学論文集第43巻, pp.683-688, 1999.] の論文に出ている計算です. なお本節で引用しているファイルはすべて toko という名前のフォルダに入っています.

2.3.1 計算格子の作成

添付の mkxyz.f というプログラムが mkxyz.d というデータファイルを読み込んで計算格子を作成します。mkxyz.d で指定する変数は図-2.4 に示すとおりです。また変数中の $n1$ は床止め間のスパンを幾つ [床止めの個数-1] とするかを指定したもので、図-2.4 の場合だと $n1 = 1$ ということになります。上下流には床止め間隔 (sl1) の半分の長さの流入部と流出部をとってあります。図を見てわかると思いますが、実数型の変数は長さや勾配、整数型の変数は格子数を表しています。

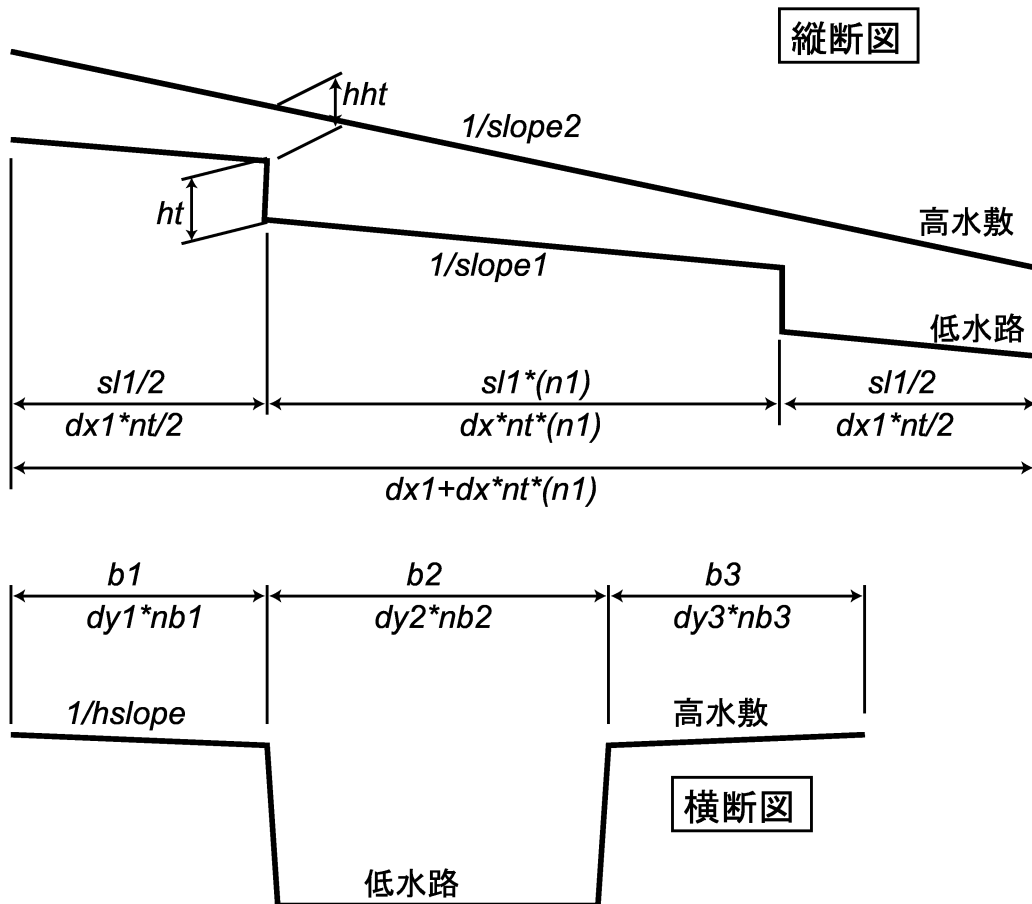


図- 2.4 複断面で床止めを含む計算の入力条件 (mkxyz.d で指定する変数)

2.3.2 流入部と流出部の境界条件

添付の toko.a.f というのが、2次元自由水面のCIP法の計算プログラムですが、この計算プログラムでは流入・流出の境界条件を一致させるという方法を用いています。なお toko.a.f をコンパイルするときには common.h というファイルも同じフォルダに置いておいて下さい。これにより、無限に床止めが連続して配置されたような条件を計算しようとするものです。具体的には図-2.5 に示すように流入部と流出部で2格子分のデータをダブらせるという方法を用いています。具体的には以下のとおりです。

$$u(0, j) = u(nx - 2, j), \quad u(1, j) = u(nx - 1, j)$$

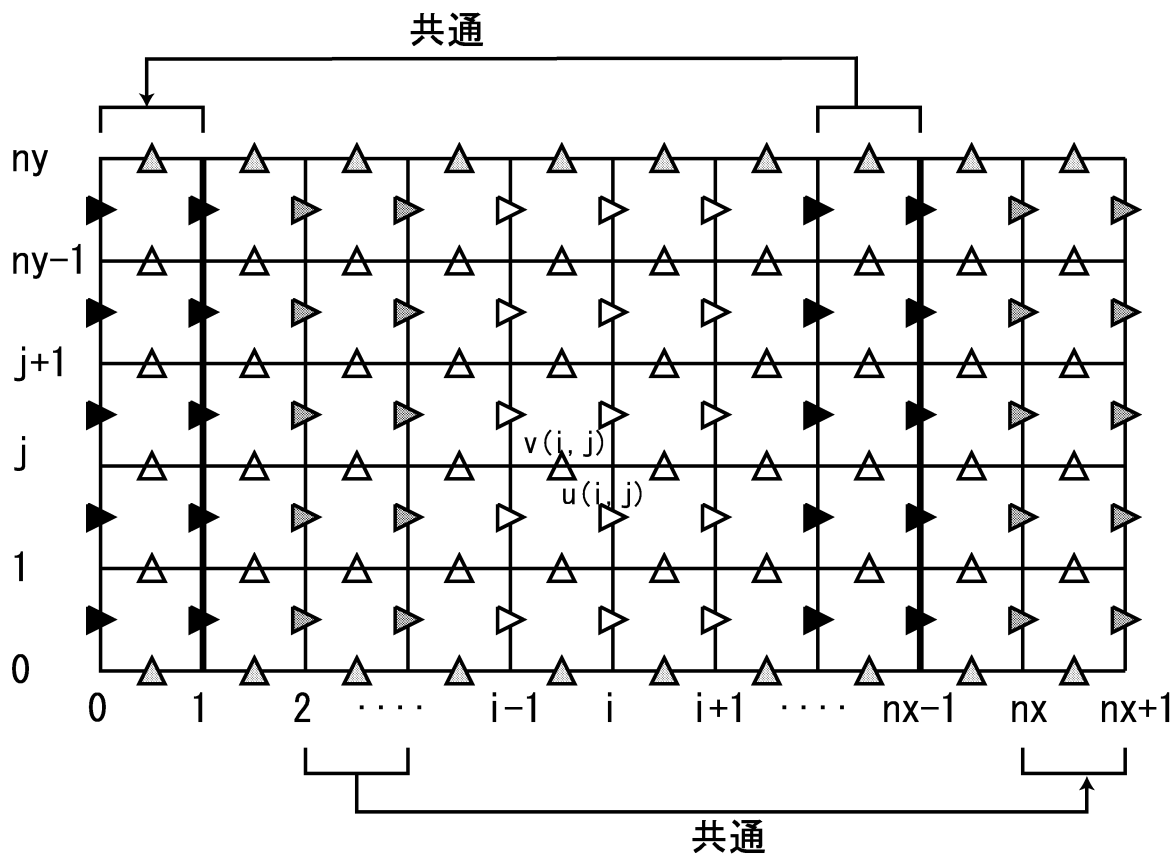


図- 2.5 周期境界条件の説明図

$$u(nx, j) = u(2, j), \quad u(nx + 1, j) = u(3, j) \quad (2.78)$$

$$v(0, j) = v(nx - 2, j), \quad v(1, j) = v(nx - 1, j)$$

$$v(nx, j) = v(2, j), \quad v(nx + 1, j) = v(3, j) \quad (2.79)$$

また、微分量についても同様な周期境界条件を与えます。側壁に関しましては、 u はスリップ条件、 v はゼロを与えます。即ち、

$$u(i, 0) = u(i, 1), \quad u(i, ny + 1) = u(i, ny) \quad (2.80)$$

$$v(i, 0) = 0, \quad v(i, ny) = 0. \quad (2.81)$$

2.3.3 計算条件

計算条件は cond.d というファイルから読み込みます。主な変数の説明は表-2.1 に示すとおりです。

表-2.1 計算条件として入力する変数の説明

変数	説明	単位
<i>qp</i>	流量	m ³ /s
<i>tuk</i>	計算結果アウトプット時間間隔	sec
<i>etime</i>	計算終了時間	sec
<i>cw</i>	側壁摩擦係数	
<i>alh, alpm</i>	繰り返し計算の緩和係数	
<i>errmax, lmax, kuri</i>	繰り返し計算の打ち切り誤差, 計算回数など	
<i>snu_0</i>	渦動粘性係数	

2.3.4 計算結果のアニメーション表示

添付の *s.mkglv.f* はアニメーション用のデータを作成するプログラムです。これを実行後に *clef2d* (市販ソフト) で1コマずつの *bitmap* ファイルを作成して, *vc* (シェアウェア) を用いて *avi* ファイルにしたアニメーションファイルが http://dpr600.hyd.eng.hokudai.ac.jp/a_cg/2d_fs_toko.ht にありますので, 必要ならダウンロードして下さい。ダブルクリックするとアニメーションが動くはずですが, また, 水面形のアニメーションも同じサイトにあります。

2.4 自由水面を持つ流れの計算例 (2)

自由水面の2次元計算をもう1例, 水制を含む流れの計算例を示します。簡単な例として直線水路に1本の水制が出ている場合の計算です。添付プログラム *cip_sui.f* は汎用的に作りましたので複数の水制にも適用可能です。また, 水制だけでなく河川の中央に障害物があるときに背後に発生するカルマン渦列の計算なんていうのにも使えます。本節で引用するファイルは *sui* というフォルダに入っています。

2.4.1 計算格子の作成

mkxyz.f というプログラムが *mkxyz.d* というデータファイルを読み込んで計算格子を作成します。*mkxyz.d* で指定する変数は表-2.2のとおりです。

mkxyz.d で必要な変数を指定したら, *mkxyz.f* をコンパイルして実行して下さい。コンパイルするとき *common.h* を同じフォルダに置いておくことを忘れないで下さい。*inieta.d* というファイルが出来ます。これが流れの計算で使用するデータファイルです。

上記の *inieta.d* には計算格子の情報の他に, 水制による境界条件も自動的に付加されます。ここで用いられる変数は図-2.6に示すとおりです。

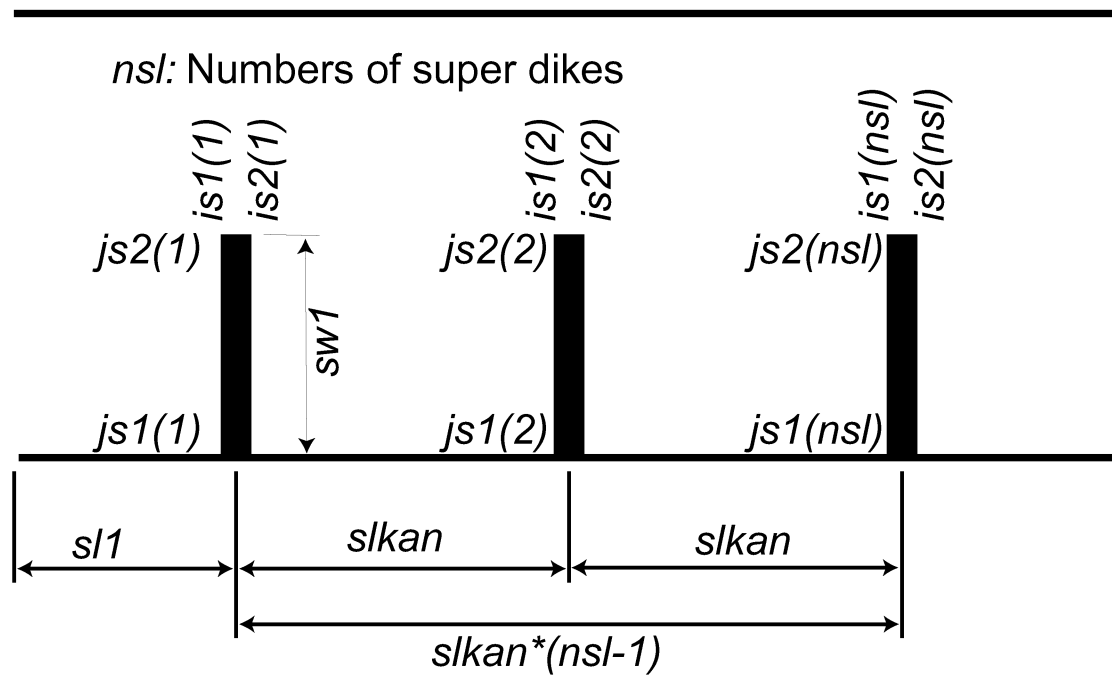


図- 2.6 水制を含む計算の変数の説明図

表- 2.2 mkxyz.d で指定する変数

変数名	説明	単位
<i>nx</i>	流下方向のグリッド数	個
<i>ny</i>	横断方向のグリッド数	個
<i>chl</i>	水路長	(m)
<i>chb</i>	水路幅	(m)
<i>slope</i>	1/水路勾配	
<i>sl1</i>	上流端から1番目の水制までの距離	(m)
<i>slkan</i>	水制の間隔	(m)
<i>sw1</i>	水制の長さ	(m)
<i>nsl</i>	水制の本数	本

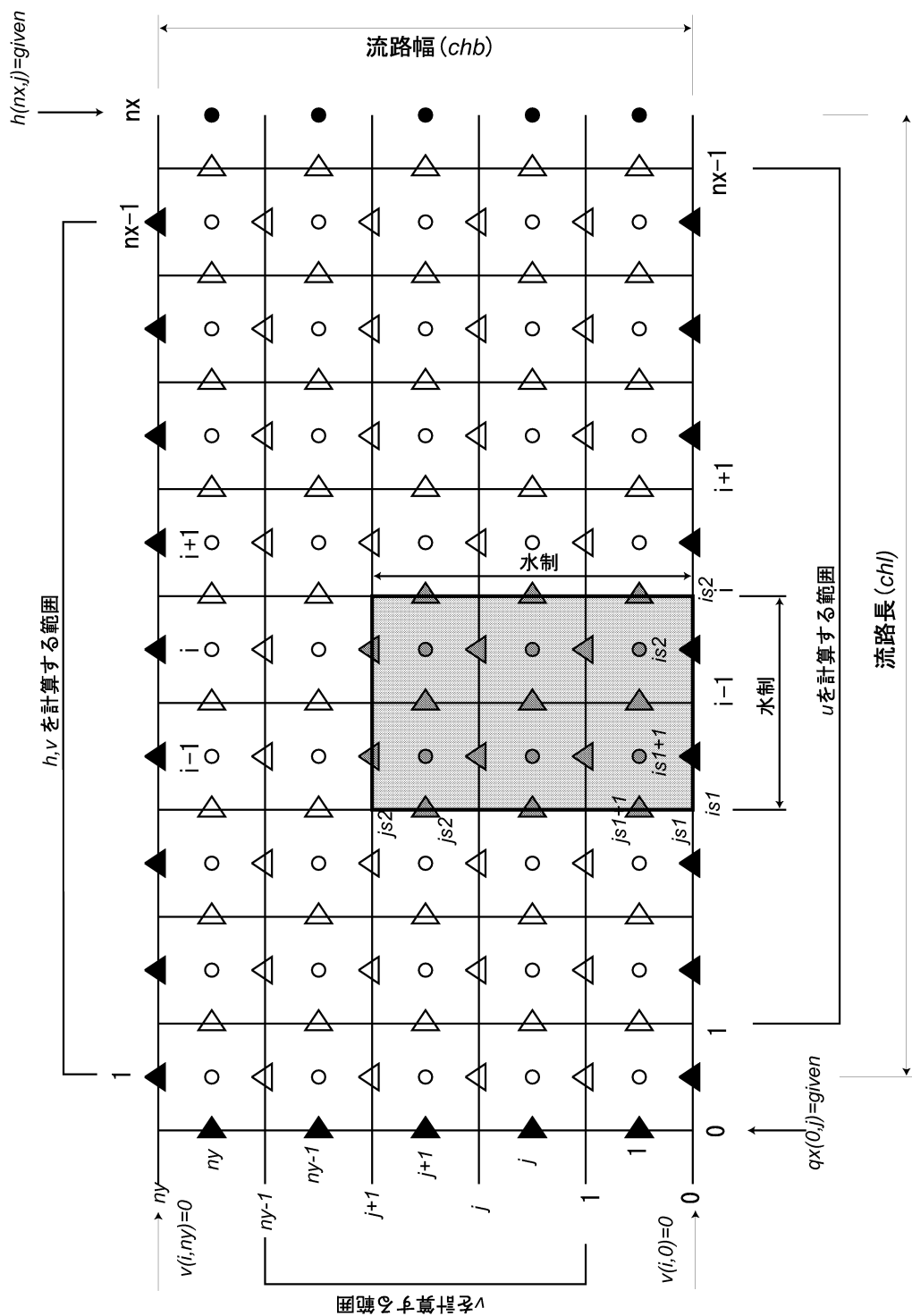


図- 2.7 水制を含む計算の計算格子の配置と境界条件の説明

表- 2.3 mkxyz.d で指定する変数

変数名	説明	単位
<i>qp</i>	流量	(m ³ /s)
<i>tuk</i>	ファイルアウトプット間隔	秒
<i>etime</i>	計算終了時間	秒
<i>dt</i>	計算の時間刻み (Δt)	秒
<i>hmin</i>	最小水深	(m)
<i>cw</i>	水路側壁の摩擦係数	
<i>alh</i>	水深の計算に用いる緩和係数	
<i>alpm</i>	断面平均水位の補正に用いる緩和係数	
<i>errmax, lmax, kuri</i>	打ち切り誤差, 繰り返し回数など	
<i>snm</i>	水路底面の粗度係数	
<i>snu_0</i>	渦動粘性係数	

2.4.2 計算プログラムの説明

添付の *cip_sui.f* が水制を含む計算の計算プログラムです。前回の床止めの計算との大きな違いは境界条件です。前回は連続的に配置された床止めが無限に続くことを想定していましたが、境界条件は上下流の変数を一致させる操作を行いました。今回は上流端で流量、下流端で水位を与えるというオーソドックスな方法にしました。(常流であることが前提ですが。) また水制限自身による境界条件は図-2.7の水制周辺の流速の計算点(図中の3角形で塗りつぶした部分)で流速をゼロとすることにより与えられます。

cip_sui.f では計算条件として *cond.d* を読み込みます。*cond.d* で指定する条件は表-2.3に示すとおりです。*cip_sui.f* を実行後に出来る *out.d* をもとに流れの様子をアニメーション表示したのが http://dpr600.hyd.eng.hokudai.ac.jp/a_cg/2d_fs_sui.htm に載っています。ダブルクリックすると動くはずですが、このアニメーションを作るのに使用するプログラムが *s_mkglv.f* です。

補遺 河床せん断力の表現方法

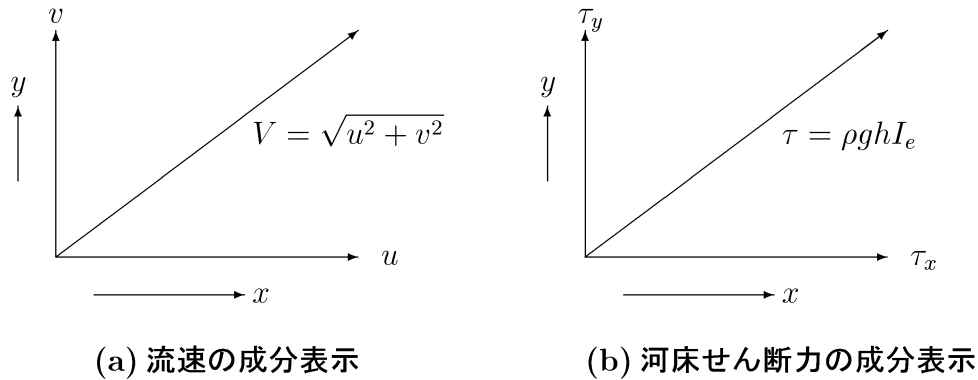


図-2.8 水深平均流速と河床せん断力の関係

図-2.8 に示すように, 水深流速の方向と河床せん断力の方向が一致するものとする. 水深平均流速の合成成分を $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ をマンニングの式で表すと,

$$V = \frac{1}{n_m} h^{2/3} I_e^{1/2} \quad (2.82)$$

となります. ただし, I_e はエネルギー勾配です. したがって, 合成流速 V による河床せん断力を τ は,

$$\tau = \rho g h I_e = \frac{\rho g n_m^2 V^2}{h^{1/3}} \quad (2.83)$$

となります. (2.83) 式および図-2.8 より, τ を x, y 方向に分離して表現すると以下のようになります.

$$\tau_x = \tau \frac{u}{V} = \frac{\rho g n_m^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (2.84)$$

$$\tau_y = \tau \frac{v}{V} = \frac{\rho g n_m^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (2.85)$$