2次元一般座標における河床変動の基礎式

Yasu Shimizu
Hokkaido University
yasu@eng.hokudai.ac.jp

June 19, 2001

1. 2次元流砂連続式

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{\partial q^x}{\partial x} + \frac{\partial q^y}{\partial y}\right] = 0 \tag{1}$$

ただし, (x, y) は互いに直交する平面座標軸, t は時間, z_b は河床高, q^x, q^y は x, y 方向の単位幅掃流砂量, λ は河床材料の空隙率.

流れの連続式と同様に上式を一般座標に変換する.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{z_b}{J}\right) + \frac{1}{1-\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{q^\xi}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{q^\eta}{J}\right)\right] = 0 \tag{2}$$

ただし, q^ξ, q^η は ξ, η 方向の単位幅掃流砂量の反変成分である.

2. 河床せん断力

合成流速 V を次式で定義する.

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{3}$$

河床に作用する無次元全せん断力 τ_* は,

$$\tau_* = \frac{hI_e}{s_g d} \tag{4}$$

ただし, h は水深, I_e はエネルギー勾配, s_g は水中比重, g は重力加速度, d は河床材料の粒径である. I_e にマニング則を適用すると, τ_* は次式となる.

$$\tau_* = \frac{n_m^2 V^2}{s_g g d} \tag{5}$$

ただし, n_m はマニングの粗度係数である.

水深平均流速の方向 (流線の方向) を s, これと直交する方向を n とすると s, n 方向の単位幅流砂量はそれぞれ, 芦田・道上の式および長谷川の式を用いて以下で表される.

$$q^s = 17\tau_*^{3/2}\left(1-\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right)\sqrt{s_g d g^3} \tag{6}$$

$$q^n = q^s\left(\frac{h}{r_s}N_* - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s\mu_k\tau_*}}\frac{\partial z_b}{\partial n}\right) \tag{7}$$

ただし, q^s, q^n はそれぞれ s(水深平均流の流線) および n(s と直角方向) の単位幅掃流砂量, r_s は水深平均流の流線の曲率半径, N_* は定数 (=7), μ_s および μ_k は河床材料の静止摩擦係数および動摩擦係数である (一般的な値として $\mu_s\mu_k = 0.5$).

3. 流線の曲率半径

(7) 式右辺第 1 項は, 水深平均流の流線 (以下, 単に流線という) の曲率に応じた 2 次流強度を表す. 以下に (7) 式で用いられる流線の曲率半径 r_s の算定法を述べる.

今, 流線と x 軸のなす角度を θ_s とすると, 流線の曲率 (1/曲率半径) は次式で求められる.

$$\frac{1}{r_s} = \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \tag{8}$$

θ_s は x 軸と s 方向の角度なので,

$$\theta_s = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \tag{9}$$

したがって,

$$\frac{1}{r_s} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\tan^{-1}(T)\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left[\tan^{-1}(T)\right]\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{1+T^2}\frac{\partial T}{\partial s} \tag{10}$$

ただし, $T = v/u$ としている. ここで,

$$\frac{1}{1+T^2} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2} = \frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{u^2}{V^2} \tag{11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u\dfrac{\partial v}{\partial s} - v\dfrac{\partial u}{\partial s}}{u^2} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{u}{V}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{V}\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{u}{V}\left(\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x\frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \frac{v}{V}\left(\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

なので, 曲率 $1/r_s$ は次式で表される.

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_s} = \frac{1}{V^3}\Bigg[&u^2\left(\xi_x\frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + uv\left(\xi_y\frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \\ &-uv\left(\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - v^2\left(\xi_y\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{14}$$

4.　横断方向斜面勾配

(7) 式の右辺第 2 項は流線と直交する方向の斜面勾配の重力効果による流砂量の補正を表している．以下にこの斜面勾配の算定法を示す．

$$\frac{\partial z_b}{\partial n} = \frac{\partial z_b}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial z_b}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial n} \tag{15}$$

ここで,

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = \xi_x \frac{\partial x}{\partial n} + \xi_y \frac{\partial y}{\partial n} = -\xi_x \sin\theta_s + \xi_y \cos\theta_s \tag{16}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = \eta_x \frac{\partial x}{\partial n} + \eta_y \frac{\partial y}{\partial n} = -\eta_x \sin\theta_s + \eta_y \cos\theta_s \tag{17}$$

なので,

$$\frac{\partial z_b}{\partial n} = (-\xi_x \sin\theta_s + \xi_y \cos\theta_s)\frac{\partial z_b}{\partial \xi} + (-\eta_x \sin\theta_s + \eta_y \cos\theta_s)\frac{\partial z_b}{\partial \eta} \tag{18}$$

ただし,

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{v}{V} = -\sin\theta_s, \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{u}{V} = \cos\theta_s \tag{19}$$

5.　q^ξ, q^η の算定

$$\begin{aligned} q^\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial s}q^s + \frac{\partial \xi}{\partial n}q^n = (\xi_x \frac{\partial x}{\partial s} + \xi_y \frac{\partial y}{\partial s})q^s + (\xi_x \frac{\partial x}{\partial n} + \xi_y \frac{\partial y}{\partial n})q^n \\ &= (\xi_x \cos\theta_s + \xi_y \sin\theta_s)q^s + (-\xi_x \sin\theta_s + \xi_y \cos\theta_s)q^n \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} q^\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial s}q^s + \frac{\partial \eta}{\partial n}q^n = (\eta_x \frac{\partial x}{\partial s} + \eta_y \frac{\partial y}{\partial s})q^s + (\eta_x \frac{\partial x}{\partial n} + \eta_y \frac{\partial y}{\partial n})q^n \\ &= (\eta_x \cos\theta_s + \eta_y \sin\theta_s)q^s + (-\eta_x \sin\theta_s + \eta_y \cos\theta_s)q^n \end{aligned} \tag{21}$$

ただし,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{u}{V} = \cos\theta_s, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{v}{V} = \sin\theta_s \tag{22}$$

6.　まとめ

河床変動の計算は以下の手順で行われる．

1. 2 次元一般座標の流れの計算 (u^ξ, u^η, u, v, h の計算)
2. (3) 式による V の計算
3. (5) 式による τ_* の計算
4. (6) 式による q^s の計算
5. (14) 式による $1/r_s$ の計算
6. (18) 式による $\partial z_b/\partial n$ の計算
7. (7) 式による q^n の計算
8. (20),(21) 式による q^ξ, q^η の計算
9. (2) 式による z_b の更新