

圧力方程式の解法について@平面 2 次元

2004 年 1 月 8 日

圧力項の部分の解法をインターネットなどをつかって多少勉強しました。とりあえず簡単に考えるために平面 2 次元で計算を行いました。

Advection phase を分離解法したい、圧力項の部分は次の (1) 式のように思います。(u の更新は $u^?$ から $u^{??}$ とします)

$$\frac{u^{??} - u^?}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{??}}{\partial x}, \quad \frac{v^{??} - v^?}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{??}}{\partial y} \quad (1)$$

これを連続式へ代入して (つまり $u^{??}, v^{??}$ が連続の式を満たすようにする) 整理すると、

$$\frac{\partial^2 p^{??}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{??}}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^?}{\partial x} + \frac{\partial v^?}{\partial y} \right) = \frac{\rho}{\Delta t} Div \quad (2)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p^{??}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{??}}{\partial y^2} &= \frac{p^?(i+1, j) - 2p^{??}(i, j) + p^?(i-1, j)}{\Delta x^2} + \frac{p^?(i, j+1) - 2p^{??}(i, j) + p^?(i, j-1)}{\Delta y^2} \\ &= \frac{\rho}{\Delta t} Div \end{aligned} \quad (3)$$

より、

$$A_P p^{??}(i, j) = A_E p^?(i+1, j) + A_W p^?(i-1, j) + A_N p^?(i, j+1) + A_S p^?(i, j-1) - \frac{\rho}{\Delta t} Div \quad (4)$$

ここで A_P, A_E, A_W, A_N, A_S はそれぞれ

$$A_P = 2 \left\{ \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right\}, \quad A_E = \frac{1}{\Delta x^2}, \quad A_W = \frac{1}{\Delta x^2}, \quad A_N = \frac{1}{\Delta y^2}, \quad A_S = \frac{1}{\Delta y^2}$$

である。式 (4) を解くと、

$$P^?(i, j) = \frac{1}{A_P} \{ A_E p^?(i+1, j) + A_W p^?(i-1, j) + A_N p^?(i, j+1) + A_S p^?(i, j-1) \} \quad (5)$$

この式を変形して式 (6) を導く。

(1) ヤコビ法

$$\begin{aligned} p^{??}(i, j) &= p^?(i, j) + \frac{1}{A_P} \left(A_E p^?(i+1, j) + A_W p^?(i-1, j) - A_P p^? \right. \\ &\quad \left. + A_N p^?(i, j+1) + A_S p^?(i, j-1) - \frac{\rho}{\Delta t} Div \right) \end{aligned} \quad (6)$$

収束時に圧力方程式が満たされる。つまり { } 内 = 0 となる。

(2) 逐次緩和法 (successive relaxation method)

$$\begin{aligned} p^{??}(i, j) &= p^?(i, j) + \frac{1}{A_P} \left(A_E p^?(i+1, j) + A_W p^{??}(i-1, j) - A_P p^? \right. \\ &\quad \left. + A_N p^?(i, j+1) + A_S p^{??}(i, j-1) - \frac{\rho}{\Delta t} Div \right) \end{aligned} \quad (7)$$

既に更新された値は最新のものをを用いることにより計算の反復回数が少なくてすむ。

(3) S O R 法 (successive over relaxation method)

$$p^{??}(i, j) = p^?(i, j) + \frac{\beta}{A_P} \left(A_E p^?(i+1, j) + A_W p^{??}(i-1, j) - A_P p^? + A_N p^?(i, j+1) + A_S p^{??}(i, j-1) - \frac{\rho}{\Delta t} Div \right) \quad (8)$$

過緩和係数 β を使用する。 β は 1.5 から 1.7 程度

先生が計算の中で使っているのは S O R 法と言っていたのですが上に載せた方法でいいのでしょうか？先生のノートの中には上でいうヤコビ法のようなものが載っていたのですが。