

## 2 次流を考慮した流線方向の浮遊砂濃度連続式

伊東祐一郎

北海道大学大学院工学研究科

環境資源工学専攻水圏工学講座応用水文学分野

yuichiro@eng.hokudai.ac.jp

2001年10月12日

### 1 3次元浮遊砂濃度連続式からの誘導

#### 1.1 3次元直交直線座標系の濃度連続式の水深方向積分

以下に3次元直交直線座標軸における浮遊砂濃度の連続式を示す.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(cu)}{\partial x} + \frac{\partial(cv)}{\partial y} + \frac{\partial(cw)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

ここで,  $u, v, w$  はそれぞれ,  $x, y, z$  軸に対応する流速,  $t$  は時間,  $c$  は微小流体塊中の浮遊砂濃度である. 上式を水深方向に積分する. (1) 式に Leibnitz rule を適用すれば, 次式のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H c dz - c(H) \frac{\partial H}{\partial t} + c(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial t} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H cu dz - c(H)u(H) \frac{\partial H}{\partial x} + c(z_b)u(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H cv dz - c(H)v(H) \frac{\partial H}{\partial y} + c(z_b)v(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y} \\ & + c(H)w(H) - c(z_b)w(z_b) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

最終的に, 水深方向に積分した浮遊砂濃度連続式は次式のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H c dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H cu dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H cv dz = q_{su} - w_f c_b \quad (3)$$

浮遊砂濃度と流速に関して水深方向の平均量を  $\bar{f}$ , 平均量からの変動成分を  $f'$  として表現すると,

$$u = \bar{u} + u'(z) \quad ; \quad v = \bar{v} + v'(z) \quad ; \quad c = \bar{c} + c'(z) \quad (4)$$

また、各物理量の変動成分はその定義から、以下の式に従う。

$$\int_{z_b}^H u'(z) dz = 0 \quad ; \quad \int_{z_b}^H v'(z) dz = 0 \quad ; \quad \int_{z_b}^H c'(z) dz = 0 \quad (5)$$

これらより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H c dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H (\bar{c} + c'(z)) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{z_b}^H \bar{c} dz + \int_{z_b}^H c'(z) dz \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{c}h) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H cu dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H (\bar{c} + c'(z)) (\bar{u} + u'(z)) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{z_b}^H \bar{c}\bar{u} dz + \bar{c} \int_{z_b}^H u'(z) dz + \bar{u} \int_{z_b}^H c'(z) dz + \int_{z_b}^H c'(z)u'(z) dz \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{c}\bar{u}h) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H c'(z)u'(z) dz \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H cv dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H (\bar{c} + c'(z)) (\bar{v} + v'(z)) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{z_b}^H \bar{c}\bar{v} dz + \bar{c} \int_{z_b}^H v'(z) dz + \bar{v} \int_{z_b}^H c'(z) dz + \int_{z_b}^H c'(z)v'(z) dz \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (\bar{c}\bar{v}h) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H c'(z)v'(z) dz \end{aligned} \quad (8)$$

以上より、水深方向に積分した直交直線座標における浮遊砂濃度の連続式は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{c}h) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{c}\bar{u}h) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{c}\bar{v}h) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H c'(z)u'(z) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H c'(z)v'(z) dz = q_{su} - w_f c_b \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $q_{su}$  は河床からの浮遊砂の単位面積あたり浮上量、 $w_f$  は砂粒子の沈降速度、 $c_b$  は河床近傍での浮遊砂濃度である。上式中の左辺第4項、第5項が水深方向の流速・浮遊砂濃度分布による濃度フラックスへの影響である。特に流路の湾曲部などでは遠心力による2次流が発生するため、この項の取り扱いが非常に重要である。しかしこのままの形では、流速、浮遊砂濃度の水深平均からの変動成分の取り扱いが難しいので、次節では、流線とそれに直交する方向を基準とした連続式を誘導する。

## 1.2 流線を基準とした濃度連続式（円筒座標系）の水深方向積分

いま、図-1のような円筒座標系を仮定する。この系は以下の定義に従う。

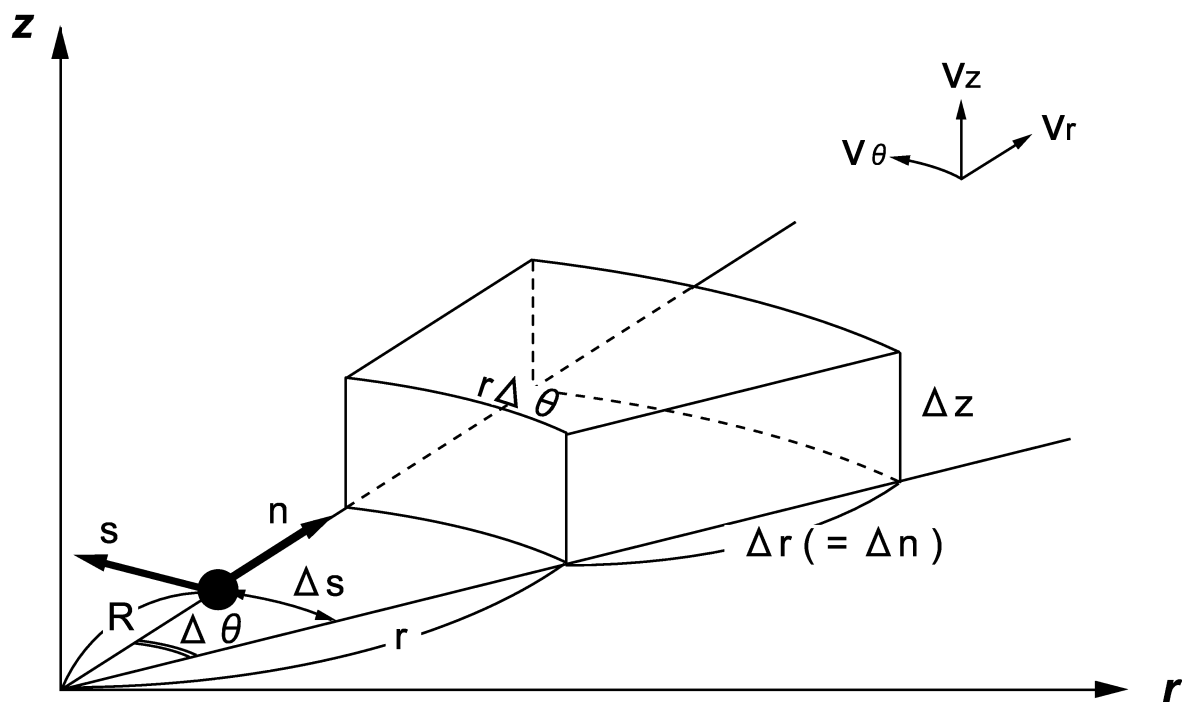


図 1: 円筒座標系概念図

$$r = R + n \quad (10)$$

$$R\Delta\theta = \Delta S \quad \Delta\theta = \frac{1}{R}\Delta S \quad (11)$$

$$\therefore r\Delta\theta = (R + n)\Delta\theta = \left(\frac{R+n}{R}\right)\Delta S = \left(1 + \frac{n}{R}\right)\Delta S \quad (12)$$

図の微小六面体を構成する流体素分の長さをそれぞれ  $\Delta r (= \Delta n)$ ,  $r\Delta\theta (= (1 + n/R)\Delta S)$ ,  $\Delta z$  とすると,  $r$  方向,  $r\theta$  方向, および  $z$  方向の単位時間当りの浮遊砂量の微小六面体内での増加分はそれぞれ,

$$-\frac{\partial}{\partial r}(cv_r r d\theta dz) dr, \quad -\frac{\partial}{\partial\theta}(cv_\theta dz dr) r d\theta, \quad -\frac{\partial}{\partial z}(cv_z drr d\theta) dz \quad (13)$$

である. したがって, これらの合計が微小六面体中の浮遊砂の単位時間当りの増加率,

$$\frac{\partial}{\partial t}(cdrr d\theta dz) \quad (14)$$

と等しいとおくと,

$$\frac{\partial}{\partial t}(cdrr d\theta dz) + \frac{\partial}{\partial r}(cv_r r d\theta dz) dr + \frac{\partial}{\partial\theta}(cv_\theta dz dr) r d\theta + \frac{\partial}{\partial z}(cv_z drr d\theta) dz = 0 \quad (15)$$

であり, これをまとめると,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(cv_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(cv_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(cv_z) = 0 \quad (16)$$

となる。ここで、上式の第2項は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(cv_r r) &= \frac{1}{r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r}(cv_r) + cv_r \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(cv_r) + \frac{cv_r}{r} \end{aligned} \quad (17)$$

であるから、(16)式は、

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(cv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(cv_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(cv_z) + \frac{cv_r}{r} = 0 \quad (18)$$

となり、(18)式に(10)、(11)、(12)式の関係代入し、流速 $v_\theta$ 、 $v_r$ をそれぞれ $U_s$  ( $s$ 軸方向の流速)、 $U_n$  ( $n$ 軸方向の流速)と表せば、

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{1+n/R} \frac{\partial}{\partial s}(cU_s) + \frac{\partial}{\partial n}(cU_n) + \frac{\partial}{\partial z}(cU_z) + \frac{1}{1+n/R} \frac{cU_n}{R} = 0 \quad (19)$$

となる。(18)式を水深方向に積分する。Leibnitz ruleを適用すれば、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H c dz - c(H) \frac{\partial H}{\partial t} + c(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial t} \\ &+ N \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^H cU_s dz - c(H)U_s(H) \frac{\partial H}{\partial s} + c(z_b)U_s(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial s} \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^H cU_n dz - c(H)U_n(H) \frac{\partial H}{\partial n} + c(z_b)U_n(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial n} \\ &+ c(H)U_z(H) - c(z_b)U_z(z_b) + \frac{N}{R} \int_{z_b}^H cU_n dz = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

である。ここで、 $N \left( = \frac{1}{1+n/R} \right)$ はmetric factorである。これを整理すれば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H c dz + N \frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^H cU_s dz + \frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^H cU_n dz + \frac{N}{R} \int_{z_b}^H cU_n dz = q_{su} - w_f c_b \quad (21)$$

となる。また前節と同様に、

$$U_s = \bar{U}_s + U'_s(z) ; \quad U_n = \bar{U}_n + U'_n(z) ; \quad c = \bar{c} + c'(z) \quad (22)$$

とすると、

$$\int_{z_b}^H U'_s(z) dz = 0 ; \quad \int_{z_b}^H U'_n(z) dz = 0 ; \quad \int_{z_b}^H c'(z) dz = 0 \quad (23)$$

であり、特に、 $n$ 軸方向に関しては、流線と直交方向にあるため、 $\bar{U}_n = 0$ である。このことを考えると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H c dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^H (\bar{c} + c'(z)) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{z_b}^H \bar{c} dz + \int_{z_b}^H c'(z) dz \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{c}h)
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^H c U_s dz &= \frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^H (\bar{U}_s + c'(z)) (\bar{c} + U'_s(z)) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_{z_b}^H \bar{c} \bar{U}_s dz + \bar{c} \int_{z_b}^H c'(z) dz + \bar{U}_s \int_{z_b}^H U'_s(z) dz + \int_{z_b}^H c'(z) U'_s(z) dz \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial s} (\bar{c} \bar{U}_s h) + \frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^H c'(z) U'_s(z) dz
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^H c U_n dz &= \frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^H (\bar{c} + c'(z)) (\bar{U}_n + U'_n(z)) dz \\
&= \frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^H c(z) U'_n(z) dz
\end{aligned} \tag{26}$$

となり，以上を整理すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\bar{c}h) + N \frac{\partial}{\partial s} (\bar{c} \bar{U}_s h) + N \frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^H c'(z) U'_s(z) dz \\
+ \frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^H c(z) U'_n(z) dz + \frac{N}{R} \int_{z_b}^H c(z) U'_n(z) dz = q_{su} - w_f c_b
\end{aligned} \tag{27}$$

特に， $\bar{U}'_n(z)$  は流線と直交する方向（ $n$  軸）での 2 次流による，平均流（= 0）からの変動成分である．すなわち，2 次流による横断方向の浮遊砂移動は，

$$\frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^H c(z) U'_n(z) dz \tag{28}$$

で表現される．

## 2 Engelund による水深方向の流速分布

### 2.1 主流（ $s$ 軸）方向の流速分布

$s$  軸（流線）方向の運動方程式， $n$  軸（流線と直交）方向の運動方程式は次の通りである．

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = g \frac{\partial \xi}{\partial s} \tag{29}$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = g \frac{\partial \xi}{\partial n} - \frac{U^2}{r} \tag{30}$$

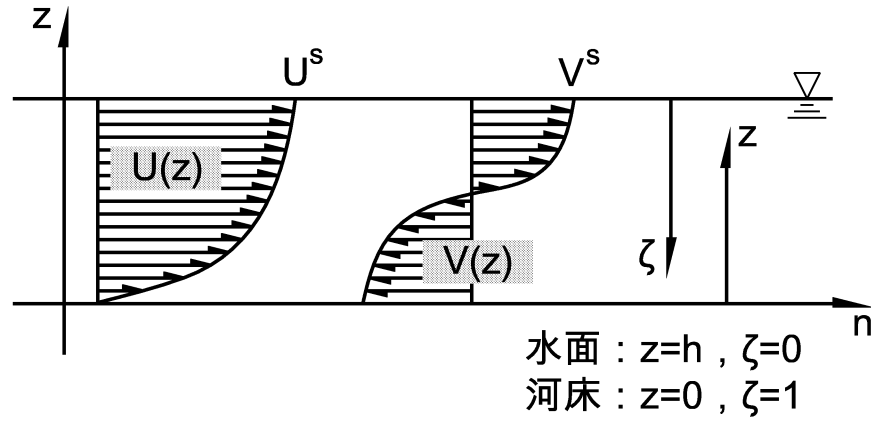


図 2:  $z$ - $\zeta$  座標系概念図

ここで、表面流速を  $U^s$ 、 $V^s$  とすると、 $s$  軸方向と  $n$  軸方向の流速は水深方向の分布関数  $\phi$  を用いて、次のように表される。

$$U = U^s \phi_U(\zeta) \quad (31)$$

$$V = V^s \phi_V(\zeta) \quad (32)$$

ここで、 $\zeta$  は図-2 に定義するような無次元量である。すなわち、

$$\zeta = \frac{h-z}{h} ; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{-1}{h} \quad (33)$$

である。(18) 式は流線方向の河床勾配を  $I_s$  とすれば、

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = g \frac{\partial \xi}{\partial s} = -g I_s \quad (34)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \\ &= \frac{U^s}{h^2} \frac{\partial^2 \phi_U}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \quad (35)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\phi_U'' &= -\frac{h^2 g I_s}{\varepsilon U^s} \\
\phi_U' &= -\frac{h^2 g I_s}{\varepsilon U^s} \zeta + C_1 \quad \phi_U'|_{\zeta=0} = 0 \quad \text{より, } C_1 = 0 \\
\phi_U &= -\frac{h^2 g I_s}{2\varepsilon U^s} \zeta^2 + C_2 \quad \phi_U|_{\zeta=0} = 1 \quad \text{より, } C_2 = 1 \\
\phi_U &= -\frac{h^2 g I_s}{2\varepsilon U^s} \zeta^2 + 1 \\
&= -\beta \zeta^2 + 1
\end{aligned} \tag{36}$$

ただし,

$$\beta = \frac{h^2 g I_s}{2\varepsilon U^s} \tag{37}$$

断面平均流速  $\bar{U}$  は,

$$\begin{aligned}
\bar{U} &= \frac{1}{h} \int_0^h U(z) dz \\
&= \frac{1}{h} \int_1^0 (-h) U^s \phi_U(\zeta) d\zeta \\
&= U^s \int_0^1 \phi_U(\zeta) d\zeta \\
&= U^s \int_0^1 (1 - \beta \zeta^2) d\zeta \\
&= U^s \left[ -\frac{1}{3} \beta \zeta^3 + \zeta \right]_0^1 \\
&= -U^s \left( \frac{1}{3} \beta - 1 \right)
\end{aligned} \tag{38}$$

となるので, 表面流速を断面平均流速で表すと,

$$\therefore U^s = \bar{U} \left( \frac{3}{3 - \beta} \right) \tag{39}$$

である. また, 流速係数  $\varphi$  は,

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\bar{U}}{u_*} \\
&= \frac{\bar{U}}{U^s} \frac{U^s}{u_*} \\
&= -\frac{U^s}{u_*} \left( \frac{1}{3} \beta - 1 \right)
\end{aligned} \tag{40}$$

である。ここで,  $\varepsilon = \kappa u_* h/6$ ,  $u_* = \sqrt{ghI_s}$  とすれば,

$$\beta = \frac{h^2 g I_s}{2 \varepsilon U^s} = \frac{h^2 g}{2} \frac{6}{\kappa u_* h} \frac{1}{U^s} \frac{u_*^2}{gh} = \frac{3u_*}{\kappa U^s} \quad (41)$$

であるから,

$$\frac{U^s}{u_*} = \frac{3}{\kappa \beta} \quad (42)$$

したがって, (41) 式は,

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{3}{\kappa \beta} \left( \frac{1}{3} \beta - 1 \right) \\ -\frac{\kappa \varphi}{3} \beta &= \frac{1}{3} \beta - 1 \\ \frac{\beta}{3} (\kappa \varphi + 1) &= 1 \\ \therefore \beta &= \frac{3}{\kappa \varphi + 1} \end{aligned} \quad (43)$$

これより,

$$\frac{U_s}{u_*} = \frac{3}{\kappa \beta} = \frac{3}{\kappa \left( \frac{3}{\kappa \varphi + 1} \right)} = \frac{3(\kappa \varphi + 1)}{3\kappa} = \varphi + \frac{1}{\kappa} \quad (44)$$

## 2.2 主流に直交 ( $n$ 軸) 方向の流速分布

(30) 式の  $n$  軸 (流線と直交) 方向の運動方程式を再記すると,

$$\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = g \frac{\partial \xi}{\partial n} - \frac{U^2}{r} \quad (45)$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} \\ &= \frac{V^s}{h^2} \frac{\partial^2 \phi_V}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \quad (46)$$



であり、これと (32) 式により、(30) 式は

$$\varepsilon \frac{V^s}{h^2} \frac{\partial^2 \phi_V}{\partial \zeta^2} = g \frac{\partial \xi}{\partial n} - \frac{U^{s2}}{r} \phi_U^2 \quad (47)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_V}{\partial \zeta^2} &= \frac{h^2}{\varepsilon V^s} \left( g \frac{\partial \xi}{\partial n} - \frac{U^{s2}}{r} \phi_U^2 \right) \\ &= \frac{h^2 U^{s2}}{r \varepsilon V^s} \left( \frac{gr}{U^{s2}} \frac{\partial \xi}{\partial n} - \phi_U^2 \right) \\ &= X(Y - \phi_U^2) \\ &= XY - X\phi_U^2 \end{aligned} \quad (48)$$

ただし、

$$X = \frac{h^2 U^{s2}}{r \varepsilon V^s} ; Y = \frac{gr}{U^{s2}} \frac{\partial \xi}{\partial n} \quad (49)$$

である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_V}{\partial \zeta} &= \int XY d\zeta - X \int \phi_U^2 d\zeta \\ &= XY\zeta - X \int (1 - \beta\zeta^2)^2 d\zeta \\ &= XY\zeta - X \int (1 - 2\beta\zeta^2 + \beta^2\zeta^4) d\zeta \\ &= XY\zeta - X \left( \zeta - \frac{2}{3}\beta\zeta^3 + \frac{1}{5}\beta^2\zeta^5 \right) + C_1 \\ &= XY\zeta - X\zeta + \frac{2}{3}X\beta\zeta^3 - \frac{1}{5}X\beta^2\zeta^5 \\ &= X \left[ (Y - 1)\zeta + \frac{2}{3}\beta\zeta^3 - \frac{1}{5}\beta^2\zeta^5 \right] \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \phi_V &= \int X \left[ (Y - 1)\zeta + \frac{2}{3}\beta\zeta^3 - \frac{1}{5}\beta^2\zeta^5 \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2}XY\zeta^2 - \frac{1}{2}X\zeta^2 + \frac{1}{6}X\beta\zeta^4 - \frac{1}{30}X\beta^2\zeta^6 + C_2 \\ &= \frac{1}{2}X\zeta^2(Y - 1) + \frac{1}{6}X\beta\zeta^4 - \frac{1}{30}X\beta^2\zeta^6 + 1 \\ &= X \left[ \frac{Y - 1}{2}\zeta^2 + \frac{\beta}{6}\zeta^4 - \frac{\beta^2}{30}\zeta^6 \right] + 1 \end{aligned} \quad (51)$$

ところで、流線に直交する  $n$  軸における水深方向の平均流速 ( $\bar{V}$ ) は 0 である。すなわち、

$$\bar{V} = \frac{1}{h} \int_0^h V(z) dz = - \int_1^0 V^s \phi_V(\zeta) d\zeta = V^s \int_0^1 \phi_V(\zeta) d\zeta = 0 \quad (52)$$

より,

$$\int_0^1 \phi_V(\zeta) d\zeta = 0 \quad (53)$$

なので,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ X \left( \frac{Y-1}{2} \zeta^2 + \frac{\beta}{6} \zeta^4 - \frac{\beta^2}{30} \zeta^6 \right) + 1 \right] d\zeta &= 0 \\ \left[ X \left( \frac{Y-1}{6} \zeta^3 + \frac{\beta}{30} \zeta^5 - \frac{\beta^2}{210} \zeta^7 \right) + \zeta \right]_0^1 &= 0 \\ X \left[ \frac{Y-1}{6} + \frac{\beta}{30} - \frac{\beta^2}{210} \right] + 1 &= 0 \\ X &= \frac{1}{\frac{1-Y}{6} - \frac{\beta}{30} + \frac{\beta^2}{210}} \end{aligned} \quad (54)$$

河床近傍での流速  $U^b$ ,  $V^b$  は,

$$\begin{aligned} U^b &= U^s \phi_U(1) = U^s (1 - \beta) \\ V^b &= V^s \phi_V(1) = V^s \left[ X \left( \frac{Y-1}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{30} \right) + 1 \right] \\ &= V^s \left[ \frac{\frac{Y-1}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{30}}{\frac{1-Y}{6} - \frac{\beta}{30} + \frac{\beta^2}{210}} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

次に河床せん断力を考える。いま,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \zeta} = -\frac{U^s}{h} \frac{\partial \phi_U}{\partial \zeta} = \frac{U^s}{h} (2\beta\zeta) \quad (56)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{\zeta=1} = \frac{2U^s\beta}{h} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = -\frac{V^s}{h} \frac{\partial \phi_V}{\partial \zeta} \\ &= -\frac{V^s}{h} X \left[ (Y-1)\zeta + \frac{2}{3}\beta\zeta^3 - \frac{1}{5}\beta^2\zeta^5 \right] \end{aligned} \quad (58)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{\zeta=1} = -\frac{V^s}{h} X \left[ Y-1 + \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{5}\beta^2 \right] \quad (59)$$

また,  $s$  軸 (流線) 方向の河床せん断力  $\tau_s$  は次のようにも表される.

$$\tau_s = \rho gh I_s = \rho u_*^2 \quad \therefore \frac{\tau_s}{\rho} = u_*^2 \quad (60)$$

$n$  軸 (流線と直交) 方向の河床せん断力  $\tau_n$  は,

$$\frac{\tau_n}{\rho} = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{\zeta=1} \quad (61)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{V^b}{U^b} = \frac{\tau_n}{\tau_s} &= \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{\zeta=1} / u_*^2 \\ &= \frac{\kappa u_* h}{6} \frac{1}{u_*^2} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{\zeta=1} \\ &= \frac{\kappa h}{6} \frac{1}{u_*} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{\zeta=1} \\ &= \frac{\kappa h}{6} \frac{3}{\kappa \beta U^s} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{\zeta=1} \\ &= \frac{h}{2\beta U^s} \left[ -\frac{V^s}{h} X \left( Y - 1 + \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{5}\beta^2 \right) \right] \\ &= -\frac{V^s X}{2\beta U^s} \left[ Y - 1 + \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{5}\beta^2 \right] \end{aligned} \quad (62)$$

これより,

$$\begin{aligned} V^s \left[ X \left( \frac{Y-1}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{30} \right) + 1 \right] / U^s (1-\beta) &= -\frac{V^s X}{2\beta U^s} \left( Y - 1 + \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{5}\beta^2 \right) \\ X \left( \frac{Y-1}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{30} \right) + 1 / (1-\beta) &= -\frac{X}{2\beta} \left( Y - 1 + \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{5}\beta^2 \right) \\ \frac{Y-1}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{30} + \frac{1}{X} &= -\frac{1-\beta}{2\beta} \left( Y - 1 + \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{5}\beta^2 \right) \\ \frac{Y-1}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{30} + \frac{1-Y}{6} - \frac{\beta}{30} + \frac{\beta^2}{210} &= -\frac{1-\beta}{2\beta} \left( Y - 1 + \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{5}\beta^2 \right) \\ \frac{Y-1}{3} + \frac{2}{15}\beta - \frac{1}{35}\beta^2 &= -\frac{1-\beta}{2\beta} (Y-1) - \frac{1-\beta}{3} + \frac{\beta(1-\beta)}{10} \\ (Y-1) \left( \frac{1}{3} + \frac{1-\beta}{2\beta} \right) &= \frac{1}{35}\beta^2 - \frac{2}{15}\beta - \frac{1-\beta}{3} + \frac{\beta(1-\beta)}{10} \\ (Y-1) \left( \frac{2\beta+3-3\beta}{6\beta} \right) &= \frac{1}{35}\beta^2 - \frac{2}{15}\beta - \frac{1}{3} + \frac{\beta}{3} + \frac{\beta}{10} - \frac{\beta^2}{10} \\ (Y-1) \frac{3-\beta}{6\beta} &= -\frac{1}{14}\beta^2 + \frac{3}{10}\beta - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$(Y - 1) = \frac{2\beta}{1 - \beta/3} \left( -\frac{1}{14}\beta^2 + \frac{3}{10}\beta - \frac{1}{3} \right) \quad (63)$$

$$\therefore Y - 1 = \frac{\beta \left( \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\beta + \frac{1}{7}\beta^2 \right)}{\frac{1}{3}\beta - 1} \quad (64)$$

また,

$$\begin{aligned} X &= \frac{h^2 U^s{}^2}{r \varepsilon V^s} \\ &= \frac{h^2 U^s{}^2}{r V^s} \frac{6}{\kappa u_* h} \\ &= \frac{6h U^s{}^2}{\kappa u_* r V^s} \end{aligned} \quad (65)$$

なので, 横断方向の表面流速  $V^s$  は次のように表される.

$$\frac{V^s}{u_*} = \frac{6}{X \kappa} \left( \frac{U^s}{u_*} \right)^2 \frac{h}{r} = \frac{6}{X \kappa} \left( \varphi + \frac{1}{\kappa} \right)^2 \frac{h}{r} \quad (66)$$

### 2.3 主流・横断方向の流速分布

以上をまとめると, 主流・横断方向流速の水深方向の分布式はそれぞれ以下の通りであり,

$$\phi_U = 1 - \beta \zeta^2 \quad (67)$$

$$\phi_V = A \left[ \frac{\alpha}{2} \zeta^2 + \frac{\beta}{6} \zeta^4 - \frac{\beta^2}{30} \zeta^6 \right] + 1 \quad (68)$$

流速分布の基準となる表面流速は,

$$\frac{U^s}{u_*} = \varphi + \frac{1}{\kappa} \quad (69)$$

$$\frac{V^s}{u_*} = \frac{6}{A \kappa} \left( \varphi + \frac{1}{\kappa} \right)^2 \frac{h}{r_*} \quad (70)$$

と表される. ここで,

$$\beta = \frac{3}{\kappa \varphi + 1} \quad (71)$$

$$\alpha = \beta \left( \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\beta + \frac{1}{7}\beta^2 \right) \bigg/ \left( \frac{\beta}{3} - 1 \right) \quad (72)$$

$$A = 1 \bigg/ \left( \frac{-\alpha}{6} - \frac{\beta}{30} + \frac{\beta^2}{210} \right) \quad (73)$$

である.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $A$  は全て,  $\kappa$  と  $\varphi$  のみを含む定数である.

### 3 浮遊砂の水深方向濃度分布

#### 3.1 水深方向の浮遊砂の濃度分布の誘導

いま，定常 2 次元等流状態の流れを考え流下方向には濃度変化はないものとする．図に示したような微小要素  $\Delta x$ ， $\Delta z$  内に微小時間  $\Delta t$  間に拡散作用により，流入する浮遊砂量は，

$$\left( D \frac{\partial c}{\partial z} \right)_2 \Delta x \Delta t \quad (74)$$

であり，同様に流出する浮遊砂量は，

$$\left( D \frac{\partial c}{\partial z} \right)_1 \Delta x \Delta t \quad (75)$$

である．また，微小要素  $\Delta x$ ， $\Delta z$  内に， $\Delta t$  間に流入する沈降量は，

$$w_f c_2 \Delta x \Delta t \quad (76)$$

であり，微小要素  $\Delta x$ ， $\Delta z$  から流出する沈降量は，

$$w_f c_1 \Delta x \Delta t \quad (77)$$

である．以上の収支を考えると，

$$\left[ \left( D \frac{\partial c}{\partial z} \right)_2 - \left( D \frac{\partial c}{\partial z} \right)_1 \right] + w_f (c_2 - c_1) = 0 \quad (78)$$

となるので，両辺を  $\Delta z$  で割って微分方程式で表示すると，次式が得られる．

$$D \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial c}{\partial z} \right) + w_f \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (79)$$

通常，平坦河床では上式中の拡散係数  $D$  は渦動粘性係数  $\varepsilon$  に等しく考える．この  $\varepsilon$  を次式で定義する．

$$\varepsilon = \frac{\kappa}{6} u_* h \quad (80)$$

ただし， $\kappa$  はカルマン定数， $h$  は水深， $u_*$  は摩擦速度である．したがって，(67) 式は次式に書き換えられる．

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial c}{\partial z} \right) + w_f \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (81)$$

(69) 式を水深方向に，すなわち  $z$  で積分すると，

$$\varepsilon \frac{\partial c}{\partial z} + w_f c + A_1 = 0 \quad (82)$$

であり、積分定数  $A_1$  は水面における条件、すなわち水面  $z = h$  では、水面から浮遊砂粒子が飛び出すことはないので、 $\partial c / \partial z = 0$ 、 $w_f c = 0$  であるから、 $A_1 = 0$  となる。ゆえに上式は次式で表される。

$$\varepsilon \frac{\partial c}{\partial z} + w_f c = 0 \quad (83)$$

上式を積分すると、

$$\int \frac{1}{c} dc = \int \left( -\frac{w_f}{\varepsilon} \right) dz \quad (84)$$

ゆえに、

$$\ln c = -\frac{w_f}{\varepsilon} z + A_2 \quad (85)$$

または、

$$c = A_3 \exp\left(-\frac{w_f}{\varepsilon} z\right) \quad (86)$$

となる。ここで、基準点濃度  $c_b$  を近似的に河床面上 ( $z \doteq 0$ ) の濃度と考えると、 $A_3 = c_b$  であるから濃度  $c$  は次式で与えられることになる。

$$c = c_b \exp\left(-\frac{w_f}{\varepsilon} z\right) \quad (87)$$

上式が浮遊砂の濃度分布式である。これに対し河床から水面までの平均濃度  $\bar{c}$  は、(75) 式より、

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{1}{h} \int_0^h c dz \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h c_b \exp\left(-\frac{w_f}{\varepsilon} z\right) dz \\ &= \frac{c_b}{h} \left[ -\frac{\varepsilon}{w_f} \exp\left(-\frac{w_f}{\varepsilon} z\right) \right]_0^h \\ &= -\frac{\varepsilon c_b}{w_f h} \left\{ \exp\left(-\frac{w_f}{\varepsilon} h\right) - \exp\left(-\frac{w_f}{\varepsilon} 0\right) \right\} \\ &= \frac{\varepsilon c_b}{w_f h} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{w_f h}{\varepsilon}\right) \right\} \end{aligned} \quad (88)$$

ここで、 $\gamma = w_f h / \varepsilon$  とおくと、次式が得られる。

$$\bar{c} = \frac{c_b}{\gamma} (1 - e^{-\gamma}) \quad (89)$$

上式が平均濃度  $\bar{c}$  と基準点濃度  $c_b$  の関係式である。したがって上式より基準点濃度は次式のように書き表される。

$$c_b = \frac{\gamma}{1 - e^{-\gamma}} \bar{c} \quad (90)$$

### 3.2 座標変換表示された浮遊砂濃度の水深方向分布

浮遊砂濃度の水深方向分布の基礎式は (79) 式より,

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + w_f \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (91)$$

であり, 河床近傍での濃度を  $c_b$ , 濃度の分布関数を  $\phi_c$  とすれば浮遊砂濃度は水深方向の関数として次式で表される.

$$c = c_b \phi_c(\zeta) \quad (92)$$

ここで,  $\zeta$  は **図-2** に定義するように,

$$\text{河床で } z = 0 \rightarrow \zeta = 1$$

$$\text{水面で } z = h \rightarrow \zeta = 0$$

である. いま,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2} \\ &= \frac{c_b}{h^2} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial z} &= \frac{\partial c}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{h} \frac{\partial c}{\partial \zeta} \\ &= -\frac{c_b}{h} \frac{\partial \phi_c}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (94)$$

(79) 式に (81) 式, (82) 式を代入すれば

$$\frac{Dc_b}{h^2} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial \zeta^2} - \frac{w_f c_b}{h} \frac{\partial \phi_c}{\partial \zeta} = 0 \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{D}{h} \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial \zeta^2} &= w_f \frac{\partial \phi_c}{\partial \zeta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial \zeta^2} &= \frac{w_f h}{D} \frac{\partial \phi_c}{\partial \zeta} \\ \therefore \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial \zeta^2} &= \gamma \frac{\partial \phi_c}{\partial \zeta} \\ \therefore \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial \zeta} \right) &= \gamma \frac{\partial \phi_c}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (96)$$

である。ただし、 $\gamma = w_f h / D$  とする。ここで、

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial \zeta} = F(\zeta) \quad (97)$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \zeta} &= \gamma F \\ \therefore F(\zeta) &= A_1 e^{\gamma \zeta} \\ \therefore \frac{\partial \phi_c}{\partial \zeta} &= A_1 e^{\gamma \zeta} \\ \therefore \phi_c &= \frac{A_1}{\gamma} e^{\gamma \zeta} = A_2 e^{\gamma \zeta} \end{aligned} \quad (98)$$

(80) 式に代入すると

$$c = c_b A_2 e^{\gamma \zeta} \quad (99)$$

河床、すなわち  $\zeta = 1$  のとき、 $c = c_b$  なので、

$$A_2 = \frac{1}{e^\gamma} \quad (100)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} c &= c_b \frac{1}{e^\gamma} e^{\gamma \zeta} \\ &= c_b e^{\gamma(\zeta-1)} \\ \therefore c &= c_b \exp \left\{ \frac{w_f h}{D} (\zeta - 1) \right\} \end{aligned} \quad (101)$$

である。通常、平坦河床では上式中の拡散係数  $D$  は渦動粘性係数  $\varepsilon$  に等しく考える。この  $\varepsilon$  を次式で定義する。



$$\varepsilon = \frac{\kappa}{6} u_* h \quad (102)$$

ただし、 $\kappa$ はカルマン定数、 $h$ は水深、 $u_*$ は摩擦速度である。したがって最終的に座標変換表示した浮遊砂濃度の水深方向分布式は、次式のようになる。

$$c = c_b \phi_c(\zeta) \quad (103)$$

$$\phi_c(\zeta) = \frac{1}{e^\gamma} e^{\gamma\zeta} = \exp\left\{\frac{w_f h}{\varepsilon}(\zeta - 1)\right\} \quad (104)$$

## 4 水深方向流速分布を考慮した流線方向の浮遊砂濃度連続式

### 4.1 2次流項

流線方向を基準とした微小塊をもとにした、3次元の浮遊砂濃度連続式を水深方向に積分した(27)式を再記する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{c}h) + N \frac{\partial}{\partial s}(\bar{c}\bar{U}_s h) + N \frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^H c'(z) U'_s(z) dz \\ + \frac{\partial}{\partial n} \int_{z_b}^H c(z) U'_n(z) dz + \frac{N}{R} \int_{z_b}^H c(z) U'_n(z) dz = q_{su} - w_f c_b \end{aligned} \quad (105)$$

ここで、上式の左辺第4項が2次流による浮遊砂移動を表している。そこで、前章までに求めた水深方向の流速、浮遊砂濃度分布をこの項に代入し河床から水面まで積分する。

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^H c(z) V'(z) dz &= \int_0^h c(z) V(z) dz \\ &= -h \int_1^0 V^s \phi_V(\zeta) c_b \phi_c(\zeta) d\zeta \\ &= V^s c_b h \int_0^1 \phi_V(\zeta) \phi_c(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (106)$$

ここで、(68)式と(104)式を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_V(\zeta) \phi_c(\zeta) d\zeta &= \int_0^1 \left\{ A \left( \frac{\alpha}{2} \zeta^2 + \frac{\beta}{6} \zeta^4 - \frac{\beta^2}{30} \zeta^6 \right) + 1 \right\} \left\{ \frac{1}{e^\gamma} e^{\gamma\zeta} \right\} d\zeta \\ &= \int_0^1 \left( \frac{A\alpha}{2e^\gamma} \zeta^2 e^{\gamma\zeta} + \frac{A\beta}{6e^\gamma} \zeta^4 e^{\gamma\zeta} - \frac{A\beta^2}{30e^\gamma} \zeta^6 e^{\gamma\zeta} + \frac{1}{e^\gamma} e^{\gamma\zeta} \right) d\zeta \end{aligned} \quad (107)$$

ここで、 $\gamma\zeta = x$ とおくと、

$$\zeta = \frac{1}{\gamma} x \quad \text{より,} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \quad \therefore \quad \partial \zeta = \frac{1}{\gamma} \partial x \quad (108)$$

なので、置き換えると (\*\*) 式は、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi_V(\zeta)\phi_c(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\gamma \left( \frac{A\alpha}{2\gamma^2 e^\gamma} x^2 e^x + \frac{A\beta}{6\gamma^4 e^\gamma} x^4 e^x - \frac{A\beta^2}{30\gamma^6 e^\gamma} x^6 e^x + \frac{1}{e^\gamma} e^x \right) dx \\
&= \int_0^\gamma \left( \frac{A\alpha}{2\gamma^3 e^\gamma} x^2 e^x + \frac{A\beta}{6\gamma^5 e^\gamma} x^4 e^x - \frac{A\beta^2}{30\gamma^7 e^\gamma} x^6 e^x + \frac{1}{\gamma e^\gamma} e^x \right) dx \\
&= \int_0^\gamma (ax^2 e^x + bx^4 e^x + cx^6 e^x + de^x) dx \\
&= a \int_0^\gamma x^2 e^x dx + b \int_0^\gamma x^4 e^x dx + c \int_0^\gamma x^6 e^x dx + d \int_0^\gamma e^x dx \quad (109)
\end{aligned}$$

ただし、

$$a = \frac{A\alpha}{2\gamma^3 e^\gamma} \quad (110)$$

$$b = \frac{A\beta}{6\gamma^5 e^\gamma} \quad (111)$$

$$c = -\frac{A\beta^2}{30\gamma^7 e^\gamma} \quad (112)$$

$$d = \frac{1}{\gamma e^\gamma} \quad (113)$$

である。いま、

$$\begin{aligned}
\int_0^\gamma x^2 e^x dx &= - \int_0^{-\gamma} e^{-y} (-y)^2 dy \\
&= - \int_0^{-\gamma} e^{-y} y^2 dy \\
&= \left[ e^{-y} (y^2 + 2y + 2) \right]_0^{-\gamma} \\
&= e^\gamma (\gamma^2 - 2\gamma + 2) - 2 \quad (114)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\gamma x^4 e^x dx &= - \int_0^{-\gamma} e^{-y} (-y)^4 dy \\
&= - \int_0^{-\gamma} e^{-y} y^4 dy \\
&= \left[ e^{-y} (y^4 + 4y^3 + 12y^2 + 24y + 24) \right]_0^{-\gamma} \\
&= e^\gamma (\gamma^4 - 4\gamma^3 + 12\gamma^2 - 24\gamma + 24) - 24 \quad (115)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\gamma x^6 e^x dx &= - \int_0^{-\gamma} e^{-y} (-y)^6 dy \\
&= - \int_0^{-\gamma} e^{-y} y^6 dy \\
&= \left[ e^{-y} (y^6 + 6y^5 + 30y^4 + 120y^3 + 360y^2 + 720y + 720) \right]_0^{-\gamma} \\
&= e^\gamma (\gamma^6 - 6\gamma^5 + 30\gamma^4 - 120\gamma^3 + 360\gamma^2 - 720\gamma + 720) - 720 \quad (116)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\gamma e^x dx &= [e^x]_0^\gamma \\ &= e^\gamma - 1\end{aligned}\tag{117}$$

である。ただし、ここで用いた公式は、 $f(x)$  が  $n$  次の多項式するとき、

$$\int e^{-x} f(x) dx = -e^{-x} \{f(x) + f'(x) + \cdots + f^n(x)\}\tag{118}$$

である。これらから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi_V(\zeta) \phi_c(\zeta) d\zeta &= a \{e^\gamma(\gamma^2 - 2\gamma + 2) - 2\} + b \{e^\gamma(\gamma^4 - 4\gamma^3 + 12\gamma^2 - 24\gamma + 24) - 24\} \\ &\quad + c \{e^\gamma(\gamma^6 - 6\gamma^5 + 30\gamma^4 - 120\gamma^3 + 360\gamma^2 - 720\gamma + 720) - 720\} + d(e^\gamma - 1) \\ &= e^\gamma(a\gamma^2 - 2a\gamma + 2a + b\gamma^4 - 4b\gamma^3 + 12b\gamma^2 - 24b\gamma + 24b + c\gamma^6 - 6c\gamma^5 + 30c\gamma^4 \\ &\quad - 120c\gamma^3 + 360c\gamma^2 - 720c\gamma + 720c + d) - 2a - 24b - 720c - d \\ &= e^\gamma [c\gamma^6 - 6c\gamma^5 + (b + 30c)\gamma^4 - (4b + 120c)\gamma^3 + (a + 12b + 360c)\gamma^2 \\ &\quad - (2a + 24b + 720c)\gamma + (2a + 24b + 720c + d)] - 2a - 24b - 720c - d \\ &= \Omega \quad \text{とおく}\end{aligned}\tag{119}$$

以上より、

$$\begin{aligned}\int_{z_b}^H V'(z)c(z) dz &\left( = \int_0^h v(z)c(z) dz \right) \\ &= V^s c_b h [e^\gamma \{c\gamma^6 - 6c\gamma^5 + (b + 30c)\gamma^4 - (4b + 120c)\gamma^3 + (a + 12b + 360c)\gamma^2 \\ &\quad - (2a + 24b + 720c)\gamma + (2a + 24b + 720c + d)\} - 2a - 24b - 720c - d] \\ &= V^s c_b h \cdot \Omega(\kappa, \varphi, w_f, \varepsilon, h)\end{aligned}\tag{120}$$

ここで、(66) 式より、

$$\frac{V^s}{u_*} = \frac{6}{A\kappa} \left(\frac{U^s}{u_*}\right)^2 \frac{h}{r_*}\tag{121}$$

であるから、(40) 式と (41) 式を用いると、

$$\begin{aligned}V^s &= \frac{6}{A\kappa} \frac{hU^{s2}}{r_* u_*} \\ &= \frac{6h\varphi}{A\kappa r_* \bar{U}} \left(\frac{3}{3-\beta}\right)^2 \bar{U}^2 \\ &= \frac{6\varphi}{A\kappa} \left(\frac{3}{3-\beta}\right)^2 \frac{h}{r_*} \bar{U}\end{aligned}\tag{122}$$

なので, (120) 式は

$$\int_{z_b}^H V'(z)c(z) dz = \bar{U}c_b h \frac{h}{r_*} \Omega \frac{6\varphi}{A\kappa} \left( \frac{3}{3-\beta} \right)^2 \quad (123)$$

となる. また, (90) 式より,

$$c_b = \frac{\gamma}{1-e^{-\gamma}} \bar{c} \quad (124)$$

なので, (123) 式は結局,

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^H V'(z)c(z) dz &= \bar{U} \bar{c} h \frac{h}{r_*} \Omega \frac{6\varphi}{A\kappa} \left( \frac{3}{3-\beta} \right)^2 \frac{\gamma}{1-e^{-\gamma}} \\ &= \bar{U} \bar{c} h \frac{h}{r_*} \Theta \end{aligned} \quad (125)$$

となる. ただし,

$$\Theta = \Omega \frac{6\varphi}{A\kappa} \left( \frac{3}{3-\beta} \right)^2 \frac{\gamma}{1-e^{-\gamma}} \quad (126)$$

である. 最終的に 2 次流の影響を考慮した流線方向の浮遊砂濃度連続式は, 流線方向の変動成分  $\left( \frac{\partial}{\partial s} \int_{z_b}^H U'(z)c'(z) dz \right)$  を無視すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{c}h) + N \frac{\partial}{\partial s} (\bar{c}\bar{U}_s h) + \frac{\partial}{\partial n} (\bar{c}\bar{U}_s h \frac{h}{r_*} \Theta) + \frac{N}{R} (\bar{c}\bar{U}_s h \frac{h}{r_*} \Theta) = q_{su} - w_f c_b \quad (127)$$

となる.