数値計算法の基礎

1.　移流方程式の数値計算 (風上差分)

流下方向に x 軸, 時間を t として, 以下に示すような 1 次元の移流方程式を数値的に計算します. ここで、f は x と t の関数で, u は定数 (一定値) で, ある物理量 f が一定の速度 c で x 方向に移動することを表します.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

単純な差分を考えると (1) 式第 2 項の差分表示として下記の 3 通りが考えられます.

- 中央差分
$$u\frac{\partial f}{\partial x} = u\frac{f(x+\Delta x,t) - f(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} \tag{2}$$
- 後進差分
$$u\frac{\partial f}{\partial x} = u\frac{f(x,t) - f(x-\Delta x,t)}{\Delta x} \tag{3}$$
- 前進差分
$$u\frac{\partial f}{\partial x} = u\frac{f(x+\Delta x,t) - f(x,t)}{\Delta x} \tag{4}$$

　ただし, Δx は x 軸の微小区間です.

$\frac{\partial f}{\partial t}$ すなわち, f の時間変化を考えるとき, 上記の表現でわかるように, 後進差分だと x 軸のマイナス方向, 前進差分だと x 軸プラス方向, 中央差分だと x 軸プラス・マイナス両方の影響を受けることが分かります.

(1) 式第 1 項も同様に, 3 通りの差分形式がありますが, t は時間軸なので, プラス・マイナスは未来・過去を表します. f の変化を時間を追って計算するときに, 現象はすべて過去に依存します. 未来の現象に依存するのは不合理です. したがって, 第 1 項は必ず前進差分をとらなければなりません. すなわち,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f(x,t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t} \tag{5}$$

ただし, Δt は微小時間です. したがって, (1) 式を計算する場合の組み合わせとして (2) と (5), (3) と (5), (4) と (5) の 3 通りがあります. ということで, 実際にやってみましょう.

演習問題 1

図–1 に示すような三角形分布を持つ f を初期条件として, 一定の速度 $u = 0.5$ で移流する様子を $\Delta x = 1$, $\Delta t = 0.1$ として計算せよ. 計算式は上記の 3 通りの方法で行うこと.

どうでしたか? おそらく, まともに計算できたのは, (3) 式を用いた後進差分の場合だけだったでしょう. まともに計算できた (3) 式の場合も, 三角形の形は保たれずに, 潰れながら移動するという結果になったと思います.

潰れる理由はさておき, とにかくまともに移動するのは (3) 式の場合だけだと思います. この理由は u という一定の速度で現象を伝えているのですから, かならず x 軸プラスの方向に現象を伝えなければならないため, 必然的に (3) 式が良いことになります. 反対に u がマイナス, すなわち x 軸マイナスの方向に現象を伝えなければならない場合は, (4) 式の前進差分のほうが良いことになります.

そこで, u の方向によって差分の向きを変えるということが必要になり, これを 風上差分 と言います. 式で書くと,

- $u > 0$ の場合

$$\frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}+u\frac{f(x,t)-f(x-\Delta x,t)}{\Delta x}=0 \tag{6}$$

すなわち,

$$f(x,t+\Delta t)=f(x,t)-u\left[f(x,t)-f(x-\Delta x,t)\right]\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{7}$$

- $u < 0$ の場合

$$\frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}+u\frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x}=0 \tag{8}$$

すなわち,

$$f(x,t+\Delta t)=f(x,t)-u\left[f(x+\Delta x,t)-f(x,t)\right]\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{9}$$

となります．これを与えられた初期条件・境界条件で順次計算することにより f の変化を求めることが出来ます．

次に, $u > 0$ の場合と $u < 0$ の場合を一本の式で表す方法を考えて見ましょう．表現を簡単にするために,

$$f(x-\Delta x,t)=f_{-1},\qquad f(x,t)=f_0,\qquad f(x+\Delta x,t)=f_1 \tag{10}$$

とします．風上差分は,

$$u\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases} u\dfrac{f_0-f_{-1}}{\Delta x}; & u>0 \\ \\ u\dfrac{f_1-f_0}{\Delta x}; & u<0 \end{cases} \tag{11}$$

となります．今,$u+|u|$ というものと, $u-|u|$ といものを考えて見ましょう．

$$u+|u|=\begin{cases} 2u & \text{if } u>0 \\ \\ 0 & \text{if } u<0 \end{cases} \tag{12}$$

$$u-|u|=\begin{cases} 0 & \text{if } u>0 \\ \\ 2u & \text{if } u<0 \end{cases} \tag{13}$$

ですから,

$$u\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(u+|u|)\frac{f_0-f_{-1}}{\Delta x}+\frac{1}{2}(u-|u|)\frac{f_1-f_0}{\Delta x} \tag{14}$$

$$= \frac{u}{2\Delta x}(f_1-f_{-1})-\frac{|u|}{2\Delta x}(f_1-2f_0+f_{-1}) \tag{15}$$